

A parametric modeling and design of a robot based on HFT method with high reduction ratio quasi hyperbolic gear

Jingdong Huang¹ Lei Chen¹ Jinxi Tan² Wei Xue² Wei Feng³

1. National Key Laboratory of High-end Equipment and Mechanical Transmission, Chongqing University, Chongqing, 400044, China

2. Ningbo Zhongdali De Intelligent Transmission Co., Ltd., Ningbo, Zhejiang, 315300, China

3. Chongqing University of Science and Technology, Chongqing 401331, China

Abstract

To meet the demands of high reduction ratio, high power density, and low noise transmission in robot joint drive systems, this paper introduces a parametric modeling design method for high reduction ratio quasi-circular gears using HFT processing. The gear surface equations are derived through the Grisson HFT process (using double-sided forming for large wheels and knife inclination semi-expansion for small wheels). By combining coordinate transformation matrices, the mathematical models of the gear surfaces for both large and small wheels are established, and the point cloud coordinates of the gear surfaces are solved based on the discretization of the axial section. A gear meshing model is further constructed, incorporating strategies for selecting gear surface reference points, adjusting gear rotation, and optimizing installation distances to ensure precise meshing during assembly. Finally, using a quasi-circular gear pair with a tooth ratio of 6:72 for robots as an example, the point cloud data of the gear surfaces is generated and completed in 3D modeling and virtual assembly verification using UG. This method integrates design and manufacturing, laying the theoretical foundation for analyzing the meshing performance of high reduction ratio quasi-circular gears, such as contact areas and transmission errors.

Keywords

high reduction ratio quasi hyperbolic gear; Grisson HFT process; parametric modeling; virtual assembly

一种基于 HFT 法机器人用高减速比准双曲面齿轮参数化建模设计

黄景东¹ 陈磊¹ 谭金玺² 薛卫² 冯伟³

1. 重庆大学高端装备机械传动全国重点实验室, 中国·重庆 400044

2. 宁波中大力德智能传动股份有限公司, 中国·浙江 宁波 315300

3. 重庆科技大学, 中国·重庆 401331

摘要

针对机器人关节驱动系统对高减速比、高功率密度及低噪声传动的需求, 本文提出一种基于HFT加工法的机器人用高减速比准双曲面齿轮参数化建模设计方法。通过格里森HFT工艺(大轮采用双面成形法、小轮采用刀倾半展成法)推导齿面方程, 结合坐标变换矩阵建立大、小轮齿面数学模型, 并基于轴截面离散化求解齿面点云坐标。进一步构建齿轮啮合模型, 引入齿面参考点选择、齿轮旋转调整和安装距优化策略, 确保装配时齿面精确啮合。最后以齿数比6:72的机器人用准双曲面齿轮副为算例, 生成齿面点云数据并在UG中完成三维建模与虚拟装配验证。该方法实现了设计制造一体化, 为高减速比准双曲面齿轮的啮合性能分析(如接触区、传动误差)奠定了理论基础。

关键词

高减速比准双曲面齿轮; 格里森HFT工艺; 参数化建模; 虚拟装配

1 引言

随着工业自动化、高端制造和智能服务机器人技术的飞速发展, 对机器人关节驱动系统提出了前所未有的高性能

要求: 高减速比、高功率密度、高精度、高动态响应、低振动噪声以及紧凑轻量化。作为关节动力传递的核心部件, 减速器的性能直接决定了机器人的负载能力、运动精度、响应速度和整体可靠性。在众多减速方案中, 准双曲面齿轮(Hypoid Gear)凭借其优异的承载能力、平稳的传动特性、紧凑的轴线偏置设计以及实现高减速比的潜力, 在高端机器人关节应用中展现出独特的优势, 尤其适用于对空间布

【作者简介】黄景东(2003-), 男, 中国湖南郴州人, 在读硕士, 从事智能制造技术研究。

局和传动性能要求极为苛刻的场景。然而，面向机器人关节应用的高减速比准双曲面齿轮设计面临着显著挑战，机器人关节通常需要极高的减速比，高减速比意味着更小的齿轮副尺寸、更复杂的齿面几何、更高的接触应力和更严格的制造公差要求。同时在高速运转下需保持低振动噪声；高负载下需确保接触区稳定、强度可靠、传动效率高；实现高性能、高可靠性的机器人用高减速比准双曲面齿轮的快速、精准设计，参数化建模技术成为关键突破口。本文建立一套基于HFT加工原理、的参数化建模设计体系，可以精确描述齿面、高效优化设计、啮合性能预测、实现设计制造一体化，在参数化模型基础上，集成齿面接触分析（TCA）、承载接触分析（LTCA）、应力分析（FEA）等仿真工具，在设计阶段即可预测齿轮副的传动误差、接触区形态与大小、应力分布、传动效率等关键性能指标。

1961年，格里森公司发表了具有里程碑意义的学术论文，该论文中首次系统阐述了齿轮接触分析的理论框架，标志着齿轮啮合分析新方法的诞生^[1]。国内郑昌启，曾韬，董学朱^[2]等学者对准双曲面齿轮设计及啮合特性研究进行了深入的研究。王伦，陈书涵^[3]根据齿面接触分析和齿轮啮合原理，建立了准双曲面齿轮齿面接触轨迹及传动误差数学模型，分析了机床调整参数的变化对齿轮接触区的影响规律。

本文根据格里森的准双曲面HFT法即大轮采用成形法，小轮采用刀倾半展成法准双曲面齿轮的加工方法，推导准双曲面齿轮的齿面方程。在此基础上，模拟齿轮副的装配与调整过程，建立了齿轮啮合模型。然后以一对机器人用齿数比为6:72准双曲面齿轮副为算例，求解获得其大轮及小轮齿面的点云坐标，并建立相应三维模型，最后，通过调整安装实现精确装配。

2 齿面方程推导

2.1 大轮齿面方程

本文研究的准双曲面齿轮副大轮采用双面成形法加工，加工时使用装配有内刀和外刀的双面刀盘同时加工大轮的凹面及凸面，加工大轮齿面的刀具切削刀盘截面如图1(a)所示，以内刀加工大轮凸面为例，加工过程中，刀盘绕 Z_g 轴旋转形成如图1(b)所示的切削锥面。切削锥面在坐标系 S_{g2} 上某一点的矢径 \mathbf{r}_2^{g2} 及其法向量 \mathbf{n}_2^{g2} 可表示为

$$\mathbf{r}_2^{g2}(u_g, \theta_g) = \begin{bmatrix} (r_G - u_g \sin \alpha_g) \cos(\theta_g) \\ (r_G - u_g \sin \alpha_g) \sin(\theta_g) \\ -u_g \cos \alpha_g \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{n}_2^{g2}(\theta_g) = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_g \cdot \cos \theta_g \\ -\cos \alpha_g \cdot \sin \theta_g \\ \sin \alpha_g \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中， r_G 表示大轮刀盘顶点半径， r_0 为大轮刀盘名义半径， P_{w2} 为刀顶错距，对于内刀 $r_G = r_0 - P_{w2} / 2$ ，对于外刀 $r_G = r_0 + P_{w2} / 2$ ， α_g 为大轮刀盘齿形角，为已知量。 θ_g 为刀盘绕 Z_g 轴旋转的角度， u_g 表示刀盘锥面参数，一般需要进行求解。

大轮的加工坐标系如图2所示。坐标系 S_g 为刀盘坐标系，固接在大轮铣刀盘上， S_{c2} 为机床坐标系， S_2 为被加工的大轮齿坯坐标系。 S_{g2} ， S_{a2} ， S_{b2} ， S_{d2} 为辅助坐标系。 X_2 为轴向轮位， E_2 为垂直轮位， V_2 为垂直刀位， H_2 为水平刀位， δ_{M2} 为大轮机床安装根锥角， X_{B2} 为床位。

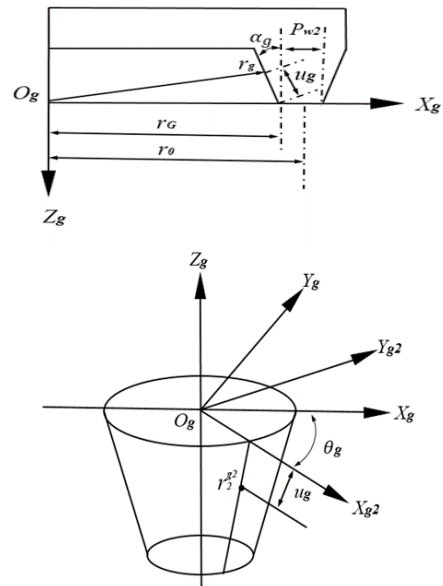


图1 大轮刀具图

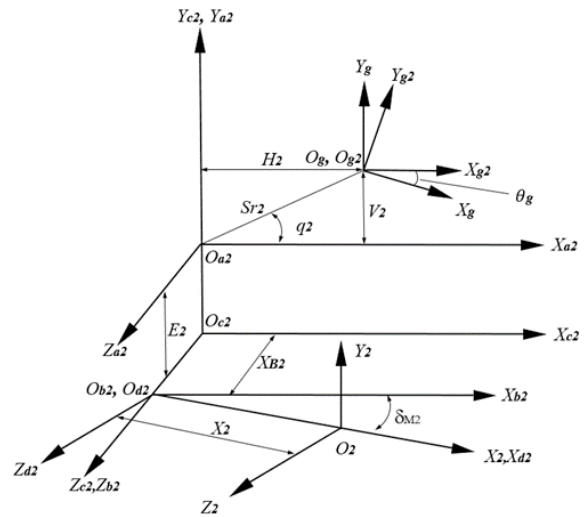


图2 大轮机床加工坐标系

通过坐标变换，将坐标系 S_{g2} 中的大轮刀具切削锥面方程变换到被加工的大轮齿轮坐标系 S_2 中，便可得到大轮齿面方程及法矢方程

$$\mathbf{r}_2(u_g, \theta_g) = \mathbf{M}_{s_2d_2} \mathbf{M}_{d_2b_2} \mathbf{M}_{b_2c_2} \mathbf{M}_{c_2a_2} \mathbf{M}_{a_2g_2} \mathbf{r}_2^{s_2}(u_g, \theta_g) \quad (3)$$

$$\mathbf{n}_2(u_g, \theta_g) = L_{s_2d_2} L_{d_2b_2} L_{b_2c_2} L_{c_2a_2} L_{a_2g_2} \mathbf{n}_2^{s_2}(u_g, \theta_g) \quad (4)$$

$\mathbf{M}_{a_2g_2}$, $\mathbf{M}_{c_2a_2}$, $\mathbf{M}_{b_2c_2}$, $\mathbf{M}_{d_2b_2}$, $\mathbf{M}_{s_2d_2}$ 为坐标系 S_{g_2} 至坐标系 S_2 坐标变换时对应的坐标变换矩阵。 $L_{a_2g_2}$, $L_{c_2a_2}$, $L_{b_2c_2}$, $L_{d_2b_2}$, $L_{s_2d_2}$ 为其对应的前三阶矩阵。

成形法加工的大轮齿面方程 $\mathbf{r}_2(u_g, \theta_g)$ 中包含两个未知量 u_g , θ_g , 分别表示刀盘绕 Z_g 轴旋转的角度和切削锥面参数。为求解这两个未知量, 首先需对大轮轴截面进行离散化处理。在坐标系 S_2 中, G_1, G_2, G_3, G_4 四点的坐标可由齿坯参数求出。接着, 将大轮轴截面沿齿宽方向和齿高方向划分为“ $m \times n$ ”个离散点, 求得各个离散点在轴截面中的坐标。随后, 基于轴截面坐标与大轮坐标系 S_2 中坐标之间的关系, 建立非线性方程组进行求解。

假设某一离散点 G_0 的在大轮轴截面坐标为 (X_{G_0}, Y_{G_0}) , 建立以下等式。

$$X_{G_0} = x_2(u_g, \theta_g) \quad (3)$$

$$Y_{G_0} = \sqrt{y_2(u_g, \theta_g)^2 + z_2(u_g, \theta_g)^2} \quad (4)$$

其中, x_2 , y_2 和 z_2 对应表示大轮齿面在大轮坐标系 S_2 中 $\mathbf{r}_2(u_g, \theta_g)$ 的坐标值分量。通过对每一个离散点进行上述方程组的求解, 便可获得大轮齿面在三维空间中的完整点云坐标数据。

2.2 小轮齿面方程

小轮采用刀倾法加工, 以加工小轮凹面为例, 加工小轮齿面的刀具切削刀盘截面如图 3(a) 所示, 加工过程中, 刀盘绕 Z_p 轴旋转形成如图 3(b) 所示的切削锥面。切削锥面在坐标系 S_{p1} 上某一点的矢径 \mathbf{r}_1^{p1} 及其法向量 \mathbf{n}_1^{p1} 可表示为

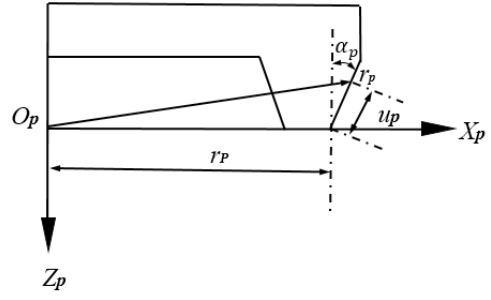
$$\mathbf{r}_1^{p1}(u_p, \theta_p) = \begin{bmatrix} (r_p + u_p \sin \alpha_p) \cos(\theta_p) \\ (r_p + u_p \sin \alpha_p) \sin(\theta_p) \\ -u_p \cos \alpha_p \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{n}_1^{p1} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_p \cdot \cos \theta_p \\ -\cos \alpha_p \cdot \sin \theta_p \\ -\sin \alpha_p \end{bmatrix} \quad (6)$$

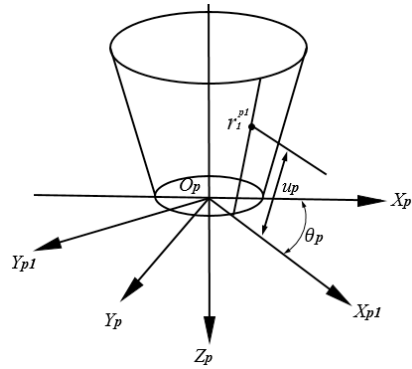
其中, r_p 表示大轮刀尖半径, α_p 为小轮刀盘齿形角, 为已知量。 θ_p 为刀盘绕 Z_p 轴旋转的角度, u_p 表示刀盘锥面参数, 一般需要进行求解。

小轮的加工坐标系如图 4 所示。坐标系 S_p 为刀盘坐标系, 固接在小轮铣刀盘上, S_{c1} 为摇台坐标系, 与摇台固接, S_{e1} 为机床坐标系, S_1 为被加工的小轮齿坯坐标系, S_{a1} 为刀倾坐标系, S_{b1} 为刀转坐标系, S_{p1} , S_{d1} , S_{f1} , S_{g1} , S_{h1} 为辅助坐标系。 X_1 为轴向轮位, E_1 为垂直轮位, S_{r1} 为径向刀位, i_1 为刀倾角, j_1 为刀转角, δ_{M1} 为小轮机床安装根

锥角, X_{B1} 为床位, ϕ_1 表示小轮加工转角, Q_1 为坐标系 S_{c1} 变换到坐标系 S_{d1} 的转动角度。 q_p 为摇台角向刀位。



(a) 小轮刀盘截面



(b) 小轮刀盘切削锥面

图 3 小轮刀具图

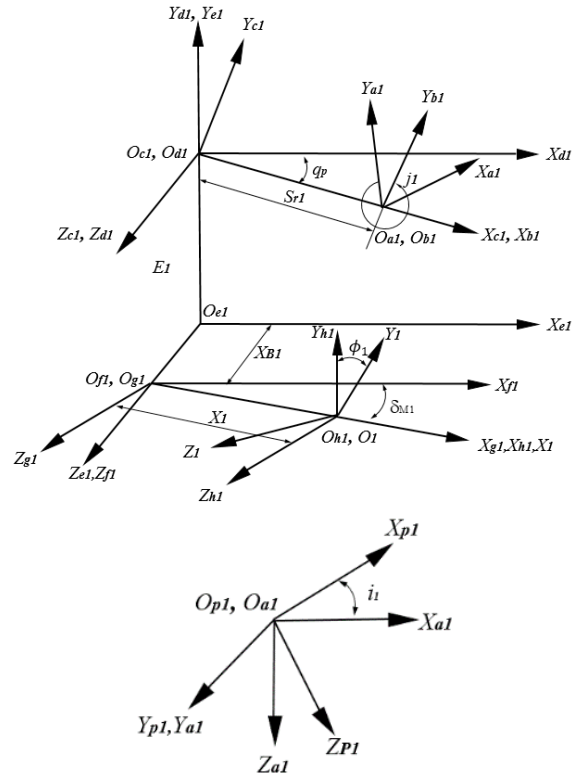


图 4 小轮加工机床坐标

通过坐标变换, 将坐标系 S_{p1} 中的小轮刀具切削锥面方程变换到被加工的小轮齿轮坐标系 S_1 中, 便可得到小轮齿面方程及法矢方程。

$$\mathbf{r}_1(u_p, \theta_p, \phi_1) = \mathbf{M}_{s1h1} \mathbf{M}_{h1g1} \mathbf{M}_{g1f1} \mathbf{M}_{f1e1} \mathbf{M}_{e1d1} \mathbf{M}_{d1c1} \mathbf{M}_{c1b1} \mathbf{M}_{b1a1} \mathbf{M}_{a1p1} \mathbf{r}_1^{p1}(u_p, \theta_p) \quad (7)$$

$$\mathbf{n}_1(u_p, \theta_p, \phi_1) = L_{s1h1} L_{h1g1} L_{g1f1} L_{f1e1} L_{e1d1} L_{d1c1} L_{c1b1} L_{b1a1} L_{a1p1} \mathbf{n}_1^{p1}(u_p, \theta_p) \quad (8)$$

\mathbf{M}_{a1p1} , \mathbf{M}_{b1a1} , \mathbf{M}_{c1b1} , \mathbf{M}_{d1c1} , \mathbf{M}_{e1d1} , \mathbf{M}_{f1e1} , \mathbf{M}_{g1f1} , \mathbf{M}_{h1g1} , \mathbf{M}_{s1h1} 为坐标系 S_{p1} 至坐标系 S_1 坐标变换时对应的坐标变换矩阵, L_{a1p1} , L_{b1a1} , L_{c1b1} , L_{d1c1} , L_{e1d1} , L_{f1e1} , L_{g1f1} , L_{h1g1} , L_{s1h1} 为其对应的前三阶矩阵。

在展成法加工中, 小轮齿面方程 $\mathbf{r}_1(u_p, \theta_p, \phi_1)$ 中含有三个未知量 u_g , θ_g , ϕ_1 , 其中, u_p 可通过 θ_p , ϕ_1 表示出来, 具体表达方法见文献^[4], 使得小轮齿面方程只含 θ_g , ϕ_1 两个未知量。后续求解过程同理于大轮齿面求解过程。将小轮齿面截面离散化, 假设某一离散点 P_0 的坐标为 (X_{p0}, Y_{p0}) , 建立以下等式:

$$X_{p0} = X_1(\phi_1, \theta_p) \quad (9)$$

3 啮合模型建立

格里森的刀倾半展成法 (HFT) 准双曲面齿轮的加工方法得到的大轮齿面方程和小轮齿面方程是在各自的齿轮坐标系中建立的, 需要将大, 小轮齿面方程及其法矢方程表示在同一坐标系中, 才能建立齿轮啮合模型。在此之前, 需要进行以下调整。

首先计算齿面参考点, 接着将大、小轮沿各自轴向旋转一定角度, 最后调整安装距。选取齿面参考点的意义指当大小轮装配好时, 大、小轮齿面正好在齿面参考点接触。将大、小轮沿各自轴向旋转一定角度是因为求出来的大、小轮齿面并不一定就是正好啮合的一对齿, 需要将大、小轮沿各自轴向旋转一定角度, 使得大、小轮齿面处于啮合位置。最后调整安装距, 保证大、小轮齿面参考点接触。

3.1 齿轮接触分析的原理

建立的准双曲面齿轮啮合坐标系如图 5 所示。

图 5 中, E 为偏置距, Σ 为轴交角。P 点为啮合时小轮齿面上的接触点, G 点为啮合时大轮齿面上的接触点。 S_1 为小轮坐标系, S_2 为大轮坐标系, S_H 为啮合坐标系, 本文中令 S_H 与 S_1 重合, S_m , S_n 为小轮、大轮的初始位置, 啮合时, 小轮从初始位置绕轴线旋转 φ_1 角度后与 S_1 重合, 大轮从初始位置绕轴线旋转 φ_2 角度后与 S_2 重合, 则此时在啮合坐标系 S_H 中, 小轮位置矢量 \mathbf{r}_1^H 与法矢方程 \mathbf{n}_1^H 可表示为

$$\mathbf{r}_1^H(u_p, \theta_p, \phi_1, \varphi_1) = \mathbf{M}_{h1}(\varphi_1) \mathbf{r}_1(u_p, \theta_p, \phi_1) \quad (10)$$

$$\mathbf{n}_1^H(u_p, \theta_p, \phi_1, \varphi_1) = L_{h1}(\varphi_1) \mathbf{n}_1(u_p, \theta_p, \phi_1) \quad (11)$$

大轮位置矢量 \mathbf{r}_2^H 与法矢方程 \mathbf{n}_2^H 可表示为

$$\mathbf{r}_2^H(u_g, \theta_g, \varphi_2) = \mathbf{M}_{h2}(\varphi_2) \mathbf{r}_2(u_g, \theta_g) \quad (12)$$

$$\mathbf{n}_2^H(u_g, \theta_g, \varphi_2) = L_{h2}(\varphi_2) \mathbf{n}_2(u_g, \theta_g) \quad (13)$$

$\mathbf{M}_{h1}(\varphi_1)$, $\mathbf{M}_{h2}(\varphi_2)$, \mathbf{M}_{Σ} 分别为对应的变换矩阵, $L_{h2}(\varphi_2)$, $L_{h1}(\varphi_1)$, L_{Σ} 为其对应的前三阶矩阵。

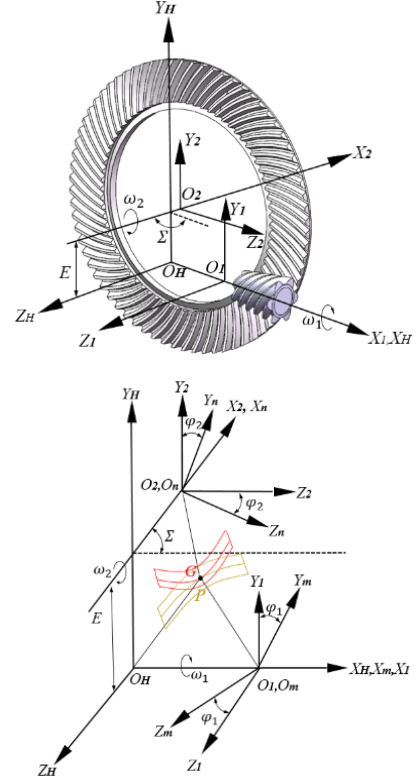


图 5 准双曲面齿轮副啮合坐标系

在啮合时刻, 大小轮齿面接触点重合, 满足以下方程

$$\mathbf{r}_H^1(u_p, \theta_p, \phi_1, \varphi_1) = \mathbf{r}_H^2(u_g, \theta_g, \varphi_2) \quad (14)$$

$$\mathbf{n}_H^1(u_p, \theta_p, \phi_1, \varphi_1) = \mathbf{n}_H^2(u_g, \theta_g, \varphi_2) \quad (15)$$

即

$$\begin{cases} x_1^H = x_2^H, & y_1^H = y_2^H, & z_1^H = z_2^H \\ e_{1x}^H = e_{2x}^H, & e_{1y}^H = e_{2y}^H, & e_{1z}^H = e_{2z}^H \end{cases} \quad (16)$$

通过求解包含七个未知数的方程组 34, 计算小轮和大轮齿面的接触点坐标。由于单位法向量 \mathbf{n}_1^H , \mathbf{n}_2^H 的约束, 实际仅有五个独立方程, 结合前面的公式推导, u_p 可以通过 θ_p, ϕ_1 表示出来, 仍剩六个未知量。为了求解该方程组, 设定小轮转角 φ_1 为已知, 通过数值迭代求解其余变量, 以固定步长改变 φ_1 的值, 可以逐步获得新的齿面接触点及齿面啮合轨迹, 迭代将在接触点超出齿面边界时终止。

由于初始值设定不当可能导致求解齿面偏离真实接触位置, 在接触分析前需进行预处理, 包括: 选取齿面参考接

触点；绕轴调整大、小轮姿态；精确设定安装距离。此过程确保齿面在参考点处实现初始啮合，从而提升接触分析的准确性。

3.2 齿面参考点的选择

选取齿面参考点的含义是指当大小轮装配好时，大、小轮齿面正好在齿面参考点接触，选择不同位置的齿面参考点，可得到齿面不同位置的接触轨迹。大、小轮在齿面参考点需要满足设计传动比。

在大轮轴截面中，大轮的齿面参考点坐标 G_c 可式由决定。

$$x_{gc} = (R_e - fb_2) \sin \delta_2 - \frac{1}{2}(h_{f2} - h_{a2}) \cos \delta_2 \quad (17)$$

$$y_{gc} = \frac{x_{gc}}{\tan \delta_{f2}} - \frac{1}{2}(h_{f2} + h_{a2}) \frac{\cos \theta_{f2}}{\delta_{f2}} - Z_f \quad (18)$$

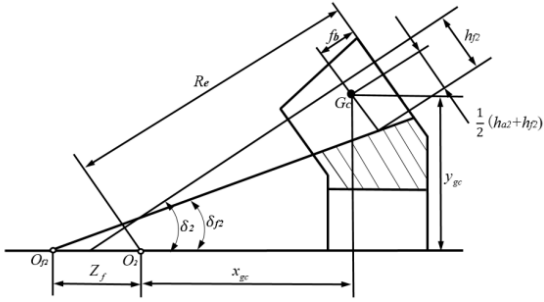


图6 大轮齿面参考点的选取

其中： R_e 为大轮外锥距， b_2 为大轮齿宽， δ_2 为大轮节角， h_{f2} 为参考点处大轮齿根高， h_{a2} 为参考点处大轮齿顶高， θ_{f2} 为大轮齿根角， δ_{f2} 大轮根锥角， Z_f 为大轮根锥顶点到交叉点的距离， f 为接触区调整系数，调整 f 的值，可改变接触区的位置，一般取 $f = 0.25, 0.5, 0.75$ ，分别得到在齿轮外端，中点和内端的接触轨迹。本文中 f 取 0.5。可由方程得到大轮齿面参考点对应的 u_{gc} ， θ_{gc} 以及在坐标系 S_2 中的大轮齿面参考点 G_c 的位置矢量 \mathbf{r}_2^{gc} 和法矢方程 \mathbf{n}_2^{gc} 。

小轮的齿面参考点在与大轮齿面参考点啮合时，需要满足式，以实现设计传动比

$$i = \frac{(p2, \mathbf{r}_2^{H_{gc}}, \mathbf{n}_2^{H_{gc}})}{(p1, \mathbf{r}_1^{H_{pc}}, \mathbf{n}_1^{H_{pc}})} = \frac{(p2, \mathbf{r}_2^{gc}, \mathbf{n}_2^{gc})}{(p1, \mathbf{r}_1^{pc}, \mathbf{n}_1^{pc})} \quad (19)$$

i 为设计传动比， $p1$ 为小轮旋转轴方向的单位向量， $p2$ 为大轮旋转轴方向的单位向量。 $\mathbf{r}_1^{H_{pc}}$ ， $\mathbf{n}_1^{H_{pc}}$ 分别表示啮合坐标系 S_H 中的小轮参考点 P_c 的位置矢量与法矢方程， $\mathbf{r}_2^{H_{gc}}$ ， $\mathbf{n}_2^{H_{gc}}$ 分别为啮合坐标系 S_H 中的大轮参考点 G_c 的位置矢量与法矢方程。 \mathbf{r}_1^{pc} ， \mathbf{n}_1^{pc} 为小轮坐标系 S_1 中的小轮参考点 P_c 的位置矢量和法矢方程，通过上式和 1.2 节的内容进行求解，可得到小轮齿面参考点对应的 u_{pc} ， θ_{pc} ，以及 \mathbf{r}_1^{pc} ， \mathbf{n}_1^{pc} 。至此，可以确定大、小轮齿面参考点。

3.3 大、小轮旋转调整

当大、小轮齿面齿面参考点确定后，需要根据求得的大、小轮齿面齿面参考点坐标点，绕各自轴线旋转一定角度，使大、小轮齿面处于啮合位置，如图7所示，假设通过 2.1 节，2.2 节求出来的大、小轮齿面齿面为蓝色齿面，若此时两齿面并不在啮合位置，大、小轮则需要分别转动 φ_g 、 φ_p 角度以到达啮合位置，如图中绿色齿面所示，此时啮合坐标系 S_H 中的大轮齿面参考点 G_c 的位置矢量 $\mathbf{r}_2^{H_{gc}}$ 与法矢量 $\mathbf{n}_2^{H_{gc}}$ 可表示为

$$\mathbf{r}_2^{H_{gc}}(u_{gc}, \theta_{gc}, \varphi_g) = \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_{hg} \mathbf{r}_2^{gc}(u_{gc}, \theta_{gc}) \quad (20)$$

$$\mathbf{n}_2^{H_{gc}}(u_{gc}, \theta_{gc}, \varphi_g) = \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_{hg} \mathbf{n}_2^{gc}(u_{gc}, \theta_{gc}) \quad (21)$$

啮合坐标系 S_H 中的小轮齿面参考点 P_c 的位置矢量 $\mathbf{r}_1^{H_{pc}}$ 与法矢方程 $\mathbf{n}_1^{H_{pc}}$ 可表示为

$$\mathbf{r}_1^{H_{pc}}(u_{pc}, \theta_{pc}, \phi_{1c}, \varphi_p) = \mathbf{M}_{hp} \mathbf{r}_1^{pc}(u_{pc}, \theta_{pc}, \phi_{1c}) \quad (22)$$

$$\mathbf{n}_1^{H_{pc}}(u_{pc}, \theta_{pc}, \phi_{1c}, \varphi_p) = \mathbf{L}_{hp} \mathbf{n}_1^{pc}(u_{pc}, \theta_{pc}, \phi_{1c}) \quad (23)$$

其中 \mathbf{M}_{hp} ， \mathbf{M}_{hg} 分别为小轮和大轮对应的旋转坐标矩阵，

\mathbf{L}_{hp} ， \mathbf{L}_{hg} 分别为 \mathbf{M}_{hp} ， \mathbf{M}_{hg} 的前三阶矩阵。

u_{gc} ， θ_{gc} 和 u_{pc} ， θ_{pc} ， ϕ_{1c} 分别是大、小轮参考点的对应坐标参数，为已知量。 φ_g 、 φ_p 为未知量，在下一节求解安装距调整值时一起求得。

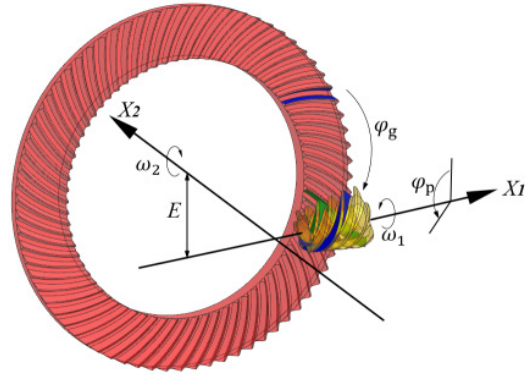


图7 大、小轮旋转示意图

3.4 安装距调整

在啮合坐标系 S_H 中，大、小轮的齿面参考点应该满足

$$\mathbf{r}_1^{H_{pc}}(u_{pc}, \theta_{pc}, \phi_{1c}, \varphi_p) = \mathbf{r}_2^{H_{gc}}(u_{gc}, \theta_{gc}, \varphi_g) \quad (24)$$

以保证大、小轮的齿面参考点的位置矢量在啮合坐标系 S_H 中重合。若啮合坐标系 S_H 中大、小轮的齿面参考点不重合，则需要调整安装距，以使得上述方程成立。安装距调整原理如图所示。

图8中， H 为小轮安装距，表示小轮沿轴向前后移动的调整值。 V 为小轮偏置距，表示小轮沿偏置方向移动的调整值。 J 为大轮安装距，表示大轮沿大轮轴线的移动的调整值。

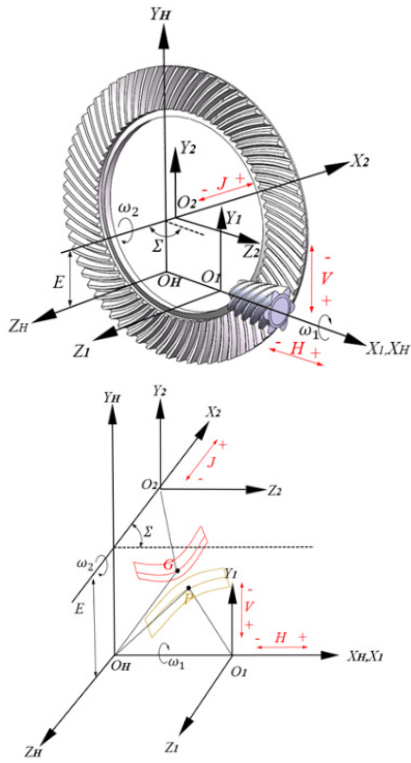


图 8 安装距调整示意图

调整后，大轮沿着轴向移动 J 的距离，将 \mathbf{M}_{hg} 改写为

$$\mathbf{M}_{hg} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & J \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_g & \sin \varphi_g & 0 \\ 0 & -\sin \varphi_g & \cos \varphi_g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & J \\ 0 & \cos \varphi_g & \sin \varphi_g & 0 \\ 0 & -\sin \varphi_g & \cos \varphi_g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

小轮分别沿着轴向移动，偏置距方向移动了 H, V 的

距离，将 \mathbf{M}_{hp} 改写为

$$\mathbf{M}_{hp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & H \\ 0 & 1 & 0 & V \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_p & \sin \varphi_p & 0 \\ 0 & -\sin \varphi_p & \cos \varphi_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & H \\ 0 & \cos \varphi_p & \sin \varphi_p & V \\ 0 & -\sin \varphi_p & \cos \varphi_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

在啮合坐标系 S_H 下，安装距调整完成的大、小轮齿面参考点满足以下方程

$$\mathbf{r}_1^{H_{pc}}(u_{pc}, \theta_{pc}, \phi_{lc}, \varphi_p, H, V) = \mathbf{r}_2^{H_{gc}}(u_{gc}, \theta_{gc}, \varphi_g, J) \quad (27)$$

$$\mathbf{n}_1^{H_{pc}}(u_{pc}, \theta_{pc}, \phi_{lc}, \varphi_p) = \mathbf{n}_2^{H_{gc}}(u_{gc}, \theta_{gc}, \varphi_g) \quad (28)$$

此时，共有 $\varphi_g, \varphi_p, H, V$ 和 J 共 5 个未知量，上述方程组包含 5 个独立的方程，求解该方程组，可得到满足齿轮装配完成时齿面参考点刚好接触的大、小轮旋转初始角度 φ_g, φ_p 以及小轮安装距 H ，小轮偏置距 V ，大轮安装距 J 。

4 算例

根据上述分析方法，以一对齿数比为 6:72 的机器人用准双曲面齿轮为例，其主要齿坯参数与加工参数如表 1、2、

3 所示：

通过本文齿面方程推导求解过程，以算例数据计算的大、小轮齿面的离散点云坐标。基于 Matlab 平台对大小轮齿面方程进行数学编程建模，所得大轮及小轮齿面点云数据如图 9 所示

表 1 大轮加工参数

加工参数名称	数值
刀盘直径 / 英寸	5
刀盘齿形角 / °	20
刀尖错距 / mm	1.14
垂直刀位 / mm	58.48
水平刀位 / mm	26.27
水平轮位 / mm	0.35
机床安装根锥角 / °	79.68

表 2 小轮加工参数

加工参数名称	凹面 - 外刀	凸面 - 内刀
刀尖半径 / mm	64.77	60.45
刀尖圆角半径 / mm	0.21	0.21
刀齿齿形角 / °	20	-26
机床安装根锥角	-2	-2
径向刀位 / mm	61.9334	66.2021
角向刀位 / °	85.4423	78.5286
轴向轮位 / mm	-0.4900	1.21
垂直轮位 / mm	25.8512	32.86
床位 / mm	0.01	7.79
刀倾角 / °	11.12	7.6686
刀转角 / °	349.98	309.25
切削滚比	11.4238	12.60844

表 3 齿坯参数

齿坯参数	大轮 (右旋)	小轮 (左旋)
中点法向模数	2.1667	
轴交角 / °	90	
偏置距 / mm	29	
齿数	72	6
齿宽 / mm	22.30	26.83
外锥距 / mm	78.49	99.92
节锥角 / °	83.59	5.78
面锥角 / °	84.02	8.69
根锥角 / °	80.39	5.42
外端直径 / mm	156.10	26.30
节锥顶点到交叉点距离 / mm	-1.13	24.90
面锥顶点到交叉点距离 / mm	-1.30	12.44
根锥顶点到交叉点距离 / mm	-0.30	22.40
中点螺旋角 / °	31.07	56.50
大端齿根高 / mm	3.57	0.88
大端齿顶高 / mm	0.40	3.15

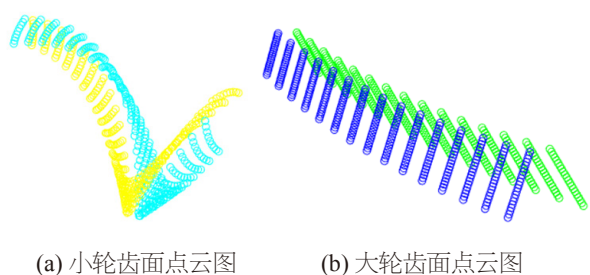


图9 齿面点云图

图9 (a) 为小轮齿面点云,青色点云表示小轮齿凸面,黄色点云表示小轮凹面。图9(b)为大轮齿面点云,蓝色点云表示大轮齿凹面,绿色点云表示大轮齿凸面。

在UG软件中,首先导入大、小轮的齿面离散点,并通过插入曲面功能拟合为齿面曲面。随后,依据齿坯几何特征构建轴截面轮廓,并通过旋转扫描生成齿坯实体。最终,利用减去和阵列等操作完成齿轮副三维建模如图10所示。

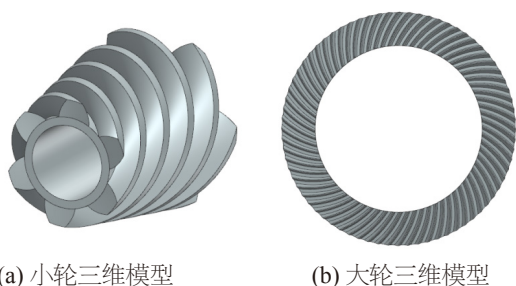


图10 准双曲面齿轮三维模型

将得到的三维模型进行旋转,平移等调整操作,最终可以得到装配位置准确的齿轮副、得到的装配完成后的齿轮副如图11所示。

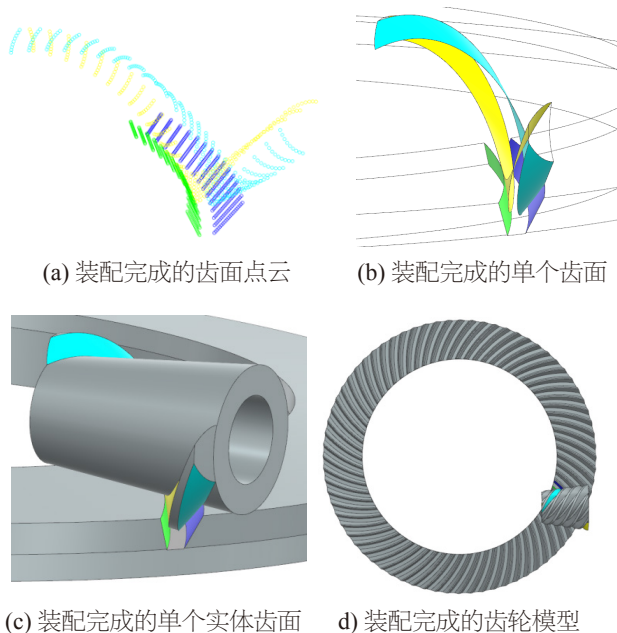


图11 装配位置的齿轮副模型

为便于理解上述啮合过程,按照上述流程,将求出的大小轮齿面点云数据,经过坐标变换映射至啮合坐标系中,可得到齿面点云数据处于啮合状态时的空间分布状态。图12展示了大、小轮齿面点云数据及其对应的大、小轮齿轮位置,其中图12(a)表示大、小轮齿面点云数据在各自坐标系中的初始位置,图12(b)则为两齿轮经过虚拟装配并完成坐标变换后,在啮合坐标系中处于实际啮合位置时的点云数据分布,直观反映了两齿面之间的啮合关系。

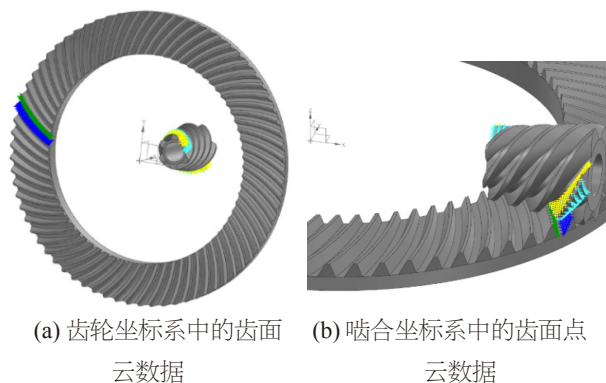


图12 虚拟装配过程

从图12中可以看出,经过上述流程将大轮与小轮的齿面点云数据映射至啮合坐标系后,小轮齿面的点云与大轮齿面实现了精确匹配,恰好处于啮合初始状态。这不仅保证了两齿轮正确的接触关系,也验证了坐标变换方法的准确性和合理性,为后续啮合性能分析提供了可靠的几何基础。

5 结语

文章首先根据准双曲面HFT法即大轮采用成形法,小轮采用刀倾半展成法准双曲面齿轮的加工方法,推导准双曲面齿轮的齿面方程。在此基础上,模拟齿轮副的装配与调整过程,建立了齿轮啮合模型,以一对机器人用齿数比为6:72准双曲面齿轮副为算例,求解获得其大轮及小轮齿面的点云坐标,并通过UG建模软件建立相应三维模型,最后,通过调整安装实现精确装配。本文为机器人用高减速比准双曲面齿轮参数化建模设计提供思路,为后续啮合性能分析提供了可靠的几何基础。

参考文献

- [1] Baxter M L. Basic geometry and tooth contact of hypoid gears[J]. Industrial Mathematics, 1961, 11(Part 2): 19-42.
- [2] 郑昌启. 弧齿锥齿轮和准双曲面齿轮的齿面接触分析计算原理[J]. 机械工程学报, 1981, 17(2): 1-12.
- [3] 王伦, 陈书涵, 肖泽亮. 机床调整参数对准双曲面齿轮啮合性能影响研究[J]. 组合机床与自动化加工技术, 2025, (01): 165-169.
- [4] 刘程. 某轻型货车驱动桥准双曲面齿轮强度和时变啮合特征研究[D], 2017.