Optimization of Commodity Packaging Methods Based on CP-SAT Algorithm

Yijie Wang

Capital University of Economics and Business, Beijing, 100070, China

Abstract

With the vigorous development of the e-commerce industry, the online mall of a certain food group has also witnessed rapid business growth. To transport commodities to customers efficiently and safely, enterprises need to pack commodities properly, select appropriate packaging boxes for loading, and then hand them over to courier companies for delivery. This study aims to optimize the selection of packaging boxes and the loading method through mathematical modeling, thereby improving the operational efficiency and economic benefits of enterprises.

Keywords

CP-SAT Algorithm; Mathematical Modeling; Express Transportation

基于 CP-SAT 算法的商品装箱方式优化 – 以某食品集团订单为例

王乙颉

首都经济贸易大学统计学院，中国・北京 100070

摘　要

随着电商行业的蓬勃发展，某食品集团的网上商城也迎来了业务的快速增长。为了将商品高效、安全的运输到顾客手中，企业需要将商品进行合理打包，并选择合适的包装箱进行装箱，然后交给快递公司发货。本研究旨在通过数学建模的方法，优化包装箱的选择和装箱方式，从而提高企业的运营效率和经济效益。

关键词

CP-SAT算法；数学建模；快递运输

1 引言

随着电商行业的蓬勃发展，某食品集团的网上商城也迎来了业务的快速增长。其中，商品包装与装箱问题是企业运营中的一个重要环节。在实际运营中，顾客在网上商城下单时，订单中包含的商品种类和数量各异。通过对订单中的商品数量进行描述性统计分析，发现商品数量较小的订单占据了绝大多数，这表明订单数据具有明显的小规模特征，因此可以采用小规模求解方法来寻找最优的装箱策略。随后，结合商品的坐标、尺寸及箱子的尺寸等约束变量，不超出箱子约束、不重叠约束、商品、以及箱子的温度类型，每个冷冻订单中要添加两个冰块等约束条件，基于 CP-SAT 算法构建了以最小化包装箱为目标的装箱优化模型。

【作者简介】王乙颉（2005—），男，本科，从事应用数学研究。

2 模型的建立条件

2.1 模型假设

（1）不考虑通过挤压等方式缩小商品所占体积，或扩大包装箱容积。

（2）将商品所占空间及包装箱可容纳空间视为长方体。

（3）认为所有商品可以沿 x 或 y 或 z 轴进行整 90 度旋转后放置，但不考虑倾斜放置。

（4）不考虑商品在包装箱内位移造成的影响。

（5）认为给出的包装箱尺寸是其内部的尺寸。

2.2 符号说明

符号	含义	单位
x_g,y_g,z_g	商品 g 在包装箱内的 x,y,z 坐标	cm
l_g,w_g,h_g	商品 g 的长度、宽度、高度	cm
L,W,H	包装箱的长度、宽度、高度	cm
$C_1 \sim C_6$	常温包装纸箱 1 号 ~6 号	无
$F_1 \sim F_4$	冷冻冷藏泡沫箱 1 号 ~4 号	无

2.3 数据分析

通过对订单数据的分析，如图 1 所示，发现大多数订单的商品数量集中在 1 到 4 件之间，其中 1 件商品的订单数量最多，达到了 18 个，其次是 2 件和 3 件商品的订单，分别为 15 个和 17 个。随着商品数量的增加，订单数量逐渐减少，10 件商品的订单数量最少，仅有 2 个。

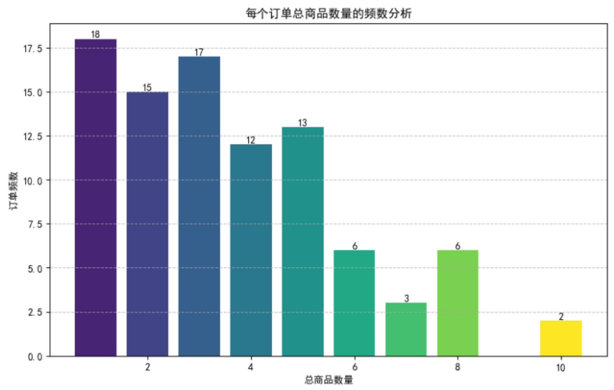

图 1 商品统计图

从图中可以看出，商品数量较小的订单占据了绝大多数，这表明订单数据具有明显的小规模特征。由于商品数量较小，可以采用小规模求解方法，如穷举法、动态规划等，来寻找最优的装箱策略。这些方法虽然在理论上可能具有较高的计算复杂度，但在大规模问题上，不能够在合理的时间内找到精确解。

3 模型的建立与求解

3.1 确定约束变量

在建立装箱方法的数学模型时，首先需要确定约束变量。这些变量是模型的基础，它们直接关系到如何描述商品在包装箱内的位置和尺寸，以及包装箱本身的限制。具体而言，这包含了以下变量。

3.1.1 商品的坐标

用 x_g，y_g，z_g 表示商品 g 在包装箱内的三维坐标位置。这些坐标不仅定义了商品在箱子内的具体位置，还为后续的约束条件提供了基础。通过这些坐标，可以确保商品在包装箱内的放置符合物理空间的限制。例如，x_g 表示商品在箱子长方向上的起始位置，y_g 和 z_g 分别表示在宽和高方向上的起始位置。这些坐标的设定能够精确地描述商品在三维空间中的位置。

3.1.2 商品的尺寸

用 l_g，w_g，h_g 分别表示商品 g 的长、宽、高尺寸。这些尺寸是商品的物理属性，决定了商品在包装箱内所占的空间大小。了解商品的尺寸对于选择合适的包装箱至关重要，因为如果包装箱的尺寸过小，商品将无法放入；而如果包装箱过大，则会浪费空间，增加包装和运输成本。因此，准确地定义商品的尺寸是模型中不可或缺的一部分。

3.1.3 商品的旋转标识

注意，尽管商品的长宽高看起来可以由商品代码直接确定，但实际上并不是如此，因为本模型考虑到了商品可以旋转后再在包装箱内放置，因此引入了旋转标识 r。下面简要说明 r 的取值范围及它的对应含义。

对于矩体商品而言，有一些旋转不变量，例如若设

$$l_g=a,w_g=b,h_g=c$$

则商品旋转后的 l_g，w_g，h_g 必须与 a，b，c 的某个重排相等。容易证明，任何满足这个条件的尺寸总能通过旋转达到，因此旋转的状态数就等于 a，b，c 的排列数，为 6。因此规定了 r 的取值范围为 0~5 的整数，这分别对应了每一种旋转状态。

3.1.4 箱子的尺寸

用 L，W，H 表示包装箱的长、宽、高尺寸。这些尺寸是包装箱的物理属性，限制了商品放置的最大空间。包装箱的尺寸不仅影响单个商品的放置，还影响多个商品的组合方式。选择合适的包装箱尺寸是优化装箱方案的关键，因为不同的包装箱尺寸会直接影响空间利用率和运输成本。

3.2 目标函数的设定

在装箱问题中，目标函数的设定与一般装箱问题有所不同。通常，装箱问题的目标是找到能够放下所有商品的最小包装箱尺寸。然而，在本问题中，可用的包装箱类型是固定的，只有几种不同的尺寸可供选择。因此，目标函数是一个离散函数，其值域由可用的包装箱类型组成。

具体来说，目标函数可以表示为：

$$f(x)=\min\{C_1,C_2,\ldots,C_6\}$$

或者

$$f(x)=\min\{F_1,F_2,\ldots,F_4\}$$

其中，$\{C_1,C_2,\ldots,C_6\}$ 和 $\{F_1,F_2,\ldots,F_4\}$分别代表不同型号的纸箱和泡沫包装箱。目标是选择一个能够装下所有商品且尺寸尽可能小的包装箱型号。这种离散函数的设定反映了实际应用中的限制，因为企业只会使用有限数量的标准包装箱型号，而不是定制任意尺寸的包装箱。通过这种方式，可以在有限的选项中找到最优解，从而在实际操作中实现成本最小化。

3.3 约束条件的设定

为了确保商品能够正确地放置在包装箱内，需要设定一系列约束条件。这些约束条件是模型的核心，它们确保了装箱方案的可行性和有效性。

3.3.1 不超出箱子约束

首先，每个商品必须完全放置在包装箱内，不能超出箱子的边界。这是装箱问题中最基本的约束条件之一。如果商品超出包装箱的边界，不仅会导致包装失败，还可能在运输过程中损坏商品。因此，必须确保每个商品的放置位置和尺寸都在包装箱的限制范围内。

这一约束可以用以下公式表示：

$$0 \le x_g,\ 0 \le y_g,\ 0 \le z_g$$

$$x_g+l_g \le L,\ y_g+w_g \le W,\ z_g+h_g \le H$$

其中，x_g，y_g，z_g 是商品的起始坐标，l_g，w_g，h_g 是商品的尺寸，L，W，H 是包装箱的尺寸。这些不等式确保商品在各个方向上都不会超出包装箱的边界。例如，$x_g+l_g \le L$；同理，其他两个不等式分别确保商品在宽和高方向上也不超出包装箱的边界。

3.3.2 不重叠约束

除了确保每个商品不超出包装箱外，还需要保证商品之间不能彼此重叠。这是装箱问题中的另一个关键约束条件。如果商品之间发生重叠，不仅会导致包装失败，还可能在运输过程中损坏商品。因此，必须确保所有商品在包装箱内互不重叠。

为了实现这一点，需要从三个方向（x、y、z）分别考虑商品之间的相对位置。首先，从 x 方向上看，两个商品 g 和 g' 不能在 x 轴上重叠。这可以通过以下条件之一来保证：

$$x_g+l_g \le x_{g'} \vee x_{g'}+l_{g'} \le x_g$$

这意味着，商品 g 在 x 轴上的结束位置必须小于或等于商品 g' 的起始位置，或者商品 g' 在 x 轴上的结束位置必须小于或等于商品 g 的起始位置。这样可以确保两个商品在 x 轴上不重叠。

同理，在 y 方向和 z 方向上的不重叠约束可以表示为：

$$y_g+w_g \le y_{g'} \vee y_{g'}+w_{g'} \le y_g$$

$$z_g+h_g \le z_{g'} \vee z_{g'}+h_{g'} \le z_g$$

这些条件分别确保两个商品在 y 轴和 z 轴上也不重叠。

然而，有必要注意到的是，当综合考虑这三个方向的条件时，需要明确这些条件之间的逻辑关系。具体来说，两个商品不重叠的条件是上述三个方向条件中至少有一个成立。数学上可以证明，两个矩形体不重叠的条件等价于将这三个方向的条件以“或”的关系组合起来。因此，合约束条件可以表示为：

$$\left(x_g+l_g \le x_{g'} \vee x_{g'}+l_{g'} \le x_g\right) \vee$$
$$\left(y_g+w_g \le y_{g'} \vee y_{g'}+w_{g'} \le y_g\right) \vee$$
$$\left(z_g+h_g \le z_{g'} \vee z_{g'}+h_{g'} \le z_g\right)$$

这种综合约束条件确保了两个商品在三维空间中互不重叠，从而为优化装箱方案提供了坚实的数学基础。

通过这些详细的约束条件，可以确保所有商品在包装箱内既不超出边界，且彼此不重叠，从而为选择最优的包装箱型号和装箱方式提供了可靠的数学模型。这种模型可以帮助企业优化包装和运输成本，提高运营效率。

3.3.3 冷冻订单的冰块添加

本问题要求对冷冻、冷藏订单做出一定特殊处理，即向其中添加两个冰块，冰块有明确的长宽高属性，并被同样视为矩体。为了处理这一情况，可以等效的认为是将订单中添加了两个额外的商品，这也带来了额外的约束，其约束处理方式同其他商品一样即可，例如在 x 轴方向上同样有不重叠约束：

$$x_g+l_g \le x_{\text{ice}} \vee x_{\text{ice}}+l_{\text{ice}} \le x_g$$

其余约束以此类推。

3.3.4 商品“常温产品瓜子（180g 袋装）”的特殊处理

本问题中要求的另一个特殊情况是：商品“常温产品瓜子（180g 袋装）”每两件视为一件，可以查询到两个与该商品相关的尺寸信息，分别是“常温产品瓜子（180g 袋装）”和“常温产品瓜子（180g 袋装 x2）”，且第一个商品体积的两倍大于第二个商品的体积。从实际情况的角度进行分析，可以推测该瓜子袋的实际形状并非一个矩体，如果找到一个矩体覆盖它所占用的空间，其实部分空间就被浪费了，而将两个瓜子袋组合到一起，就可以很好的将空间节约下来，这就是上面两个商品信息中体现的体积不一致的原因。

具体到求解过程中的处理，可以首先对每个订单的商品列表进行预处理，检测“常温产品瓜子（180g 袋装）”的数量是否大于等于 2，如果满足该条件，就将两个合并为一个“常温产品瓜子（180g 袋装 x2）”，且该过程循环进行，直到条件不再满足为止。

4 基于 CP-SAT 算法对问题的求解

4.1 引入

在整数规划问题中，选择合适的算法至关重要。本文使用了一种基于约束规划的整数规划求解算法——CP-SAT 算法。CP-SAT 算法的核心思想是将整数规划问题转化为布尔可满足性问题（SAT）和伪布尔优化（PBO）问题。通过布尔逻辑运算和冲突分析技术，算法能够高效地探索解空间，寻找最优解。

4.2 约束满足问题的数学模型

约束满足问题（CSP）可以表示为一个三元组（X,D,C），其中：

$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ 是变量集合；

$D=\{D_1,D_2,\ldots,D_n\}$ 是变量的取值域集合，每个变量 x_i 的取值域 D_i 是一个有限整数集合；

$C=\{c_1,c_2,\ldots,c_m\}$ 是约束条件集合，每个约束 c_j 是一个函数，定义在变量子集上，表示这些变量之间的关系。目标是找到变量的一个赋值，使得所有约束条件都得到满足。

4.3 整数规划问题的转化

在包装箱优化问题中，需要选择合适的包装箱，并确定如何放置商品以最大化空间利用率。通过构建不重叠约束和不超出箱子约束，可以将问题转化为整数规划问题。而整数规划问题可以进一步转化为约束满足问题。对于一个整数规划问题，其数学模型可以表示为：

$$\text{minimize } f(x)$$
$$\text{subject to } g_i(x) \le 0, i=1,2,\ldots,m$$
$$x_j \in Z, j=1,2,\ldots,n$$

其中，f(x) 是目标函数，$g_i(x)$ 是约束条件，x 是整数变量向量。通过将整数变量表示为二进制位向量，并将约束条件转化为布尔逻辑表达式，整数规划问题可以转化为 SAT 问题。

4.4 CP–SAT 算法的搜索策略

CP-SAT 算法采用启发式搜索策略，结合冲突分析和回溯技术，逐步探索解空间。具体步骤如下：

(1) 预处理：对问题进行简化和优化，减少变量和约束的数量。

(2) 搜索：通过猜测变量的取值，逐步构建解。

(3) 传播：根据当前变量的赋值，推导其他变量的可能取值。

(4) 冲突分析：当检测到冲突时，分析冲突原因，并学习新的约束条件。

(5) 回溯：撤销之前的猜测，尝试其他可能的赋值。

(6) 重启：在一定条件下重启搜索，避免陷入局部最优。

冲突驱动的回溯（CDCL）算法是 CP-SAT 算法的核心。当检测到冲突时，算法不仅会回溯到冲突发生之前的决策点，还会分析冲突的原因，学习新的约束条件，以避免在未来搜索中再次出现类似的冲突。这种学习机制能够显著减少搜索空间，提高求解效率。

5 结语

CP-SAT 算法作为一种新型的约束规划求解方法，通过结合 SAT 和 PBO 技术，能够高效地解决整数规划问题。在包装箱优化问题中，CP-SAT 算法能够帮助找到最优的包装方案，提高空间利用率，降低包装和运输成本。通过 CP-SAT 算法，逐步探索解空间，寻找满足所有约束条件的最优解。算法高效地处理大规模问题，并在合理的时间内找到了最优解。

参考文献

[1] 孙淑军,李德明,王长通,等. CP-SAT模型驱动的研发台架任务调度优化策略[J]. 智能制造,2024(6):123-128.

[2] 陈骏平,牛冠凯,李啸. 面向车间排产优化的建模求解工具的研究与实现[J]. 数字化转型,2025,2(4):66-74,109.

[3] 王宏乾,顾超,徐冉. 基于人工智能视觉算法的快递包裹结算重量偏差风险防控[J]. 物流技术与应用,2025,30(7):100-105.

[4] 周丽,杨江龙,赵俊辉,等. 基于混合遗传算法的多箱型三维装箱问题研究[J]. 包装工程,2022,43(21):213-223.

[5] 魏丽军. 求解装箱问题的启发式算法研究[D]. 福建:厦门大学,2008.

[6] 赵志丽. 对一类包装盒设计的建模问题的思考[J]. 上海中学数学,2024(9):5-8.