Optimal Control Problem Analysis of Nonlinear Stochastic Systems under Mean Field Theory

Qiaoying Chi

Qilu University of Technology, No.3501 Daxue Road, Changqing District, Jinan City, Shandong Province, Dezhou, Shandong, 253400, China

Abstract

Against the backdrop of advancing research in complex system modeling and control, optimal control problems for nonlinear stochastic systems have emerged as a pivotal research frontier. Traditional approaches demonstrate limitations when addressing large-scale individual interactions and uncertain disturbances. The mean-field theory provides a novel analytical framework for control strategy design by incorporating population-level statistical characteristics. By constructing nonlinear stochastic system models based on this theory and transforming optimal control problems into coupled systems of HJB equations and Fokker-Planck equations, we elucidate the interactive relationship between individual decision-making and collective distribution patterns. Through analysis of representative models, we verify the existence and stability of control strategies while employing numerical methods for solution computation. The study demonstrates that the mean-field approach enhances system control robustness and scalability, exhibiting significant practical value in complex networks and multi-agent systems.

Keywords

mean-field theory; nonlinear stochastic systems; optimal control; HJB equation; Fokker–Planck equation

平均场理论下非线性随机系统最优控制问题分析

迟巧英

山东省济南市长清区大学路 3501 号齐鲁工业大学，中国・山东 德州 253400

摘　要

在复杂系统建模与控制研究不断深化的背景下，非线性随机系统的最优控制问题逐渐成为重要研究方向。传统方法在处理大规模个体交互与不确定扰动时存在不足，平均场理论通过引入群体统计特征，为控制策略设计提供了新的分析框架。基于该理论构建非线性随机系统模型，并将最优控制问题转化为HJB方程与Fokker–Planck方程的耦合体系，从而刻画个体决策与整体分布的互动关系。通过典型模型分析控制策略的存在性与稳定性，并结合数值方法进行求解。研究结果表明，平均场方法能够提升系统控制的鲁棒性与可扩展性，在复杂网络与多主体系统中具有较高应用价值。

关键词

平均场理论；非线性随机系统；最优控制；HJB方程；Fokker–Planck方程

1 引言

随着复杂系统规模的不断扩大，系统中个体之间的相互作用呈现出高度非线性与随机性特征，传统集中式控制方法在计算复杂度与信息获取方面面临明显挑战。在此背景下，平均场理论通过对大量个体行为进行统计描述，将多主体问题转化为分布演化问题，为非线性随机系统的控制分析提供了有效工具。特别是在最优控制问题中，平均场方法能够将个体最优策略与群体分布演化相结合，从而形成具有自洽性的控制框架。围绕这一思路，对平均场理论在非线性随机系统最优控制中的建模方法、求解结构及应用路径展开系统分析，有助于深化对复杂系统控制机理的理解，并为相关工程实践提供理论支持。

2 平均场理论与非线性随机系统的基本框架

2.1 平均场理论的数学基础与建模思想

平均场理论起源于统计物理，其核心在于通过整体平均效应替代复杂的个体间相互作用。在多主体系统中，当个体数量趋于无穷时，系统行为可由分布函数描述，从而避免直接处理高维耦合问题。在数学上，平均场模型通常以概率测度为基础，通过描述状态分布的演化来刻画系统整体行为。个体动力学可表示为受随机扰动影响的随机微分方程，而群体层面则由概率密度函数或测度演化方程加以描述。这种建模方式在降低计算复杂度的同时，保留了系统的关键统计特征。

【作者简介】迟巧英（2003–），女，中国山东德州人，硕士，从事系统控制理论及应用研究。

2.2 非线性随机系统的结构特征

非线性随机系统通常表现为状态变量与控制变量之间存在复杂非线性关系，同时受到随机噪声的持续影响。系统演化过程不仅依赖当前状态，还受到概率分布及其历史轨迹的影响。在平均场框架下，个体动力学往往包含分布函数作为参数，使得系统呈现出耦合结构。该类系统的主要特点包括非线性漂移项、扩散项的随机扰动以及分布依赖性，这些因素共同决定了系统的复杂行为。对这类系统进行分析，需要在随机分析与非线性动力学之间建立统一描述。

2.3 平均场框架下的系统建模方法

在平均场理论指导下，非线性随机系统通常通过随机微分方程与分布演化方程的耦合形式进行建模。个体层面以 Itô 型随机微分方程刻画状态在随机扰动下的演化过程，群体层面则借助 Fokker–Planck 方程描述概率分布的动态变化。二者通过分布依赖项形成反馈耦合，使系统呈现出由个体行为驱动并反作用于群体结构的闭环特征。在建模过程中，需要明确控制变量在漂移项与扩散项中的作用方式，并对成本函数进行合理设计，使其同时反映个体性能与群体效应。该类方法在保持模型表达能力的同时，兼顾了分析与求解的可行性，为后续最优控制问题的研究提供了坚实基础。

3 平均场最优控制问题的理论构建

3.1 最优控制问题的形式化描述

在平均场框架中，最优控制问题以概率分布与个体状态的协同演化为核心，通常通过引入期望型性能指标对系统行为进行度量。成本函数不仅依赖控制变量对单个个体轨迹的影响，还包含分布项所反映的群体效应，使问题呈现出明显的非局部特征。状态方程多采用受控随机微分方程描述，其中漂移项与扩散项可能显式依赖于整体分布，从而形成闭环耦合结构。形式化过程中需要给出控制策略的可行域、适应性条件以及终端约束，并将分布演化纳入约束体系，使最优控制问题转化为带有分布约束的变分问题。该类问题在函数空间中进行求解，其解的结构具有显著的非线性与路径依赖特征，为后续最优性分析奠定基础。

3.2 HJB 方程与最优性条件分析

在动态规划原理的指导下，值函数被引入以刻画系统从任意初始状态出发的最优收益结构，由此推导出的 Hamilton–Jacobi–Bellman 方程构成最优控制问题的核心描述。在平均场情形中，值函数不仅依赖个体状态，还受到分布变量的影响，使 HJB 方程呈现出更高维度与更复杂的非线性结构。该方程通常与描述分布演化的方程形成前后向耦合系统，其求解过程需要在时间维度上同时处理终端条件与初始条件之间的相互制约。通过对解的正则性、唯一性及稳定性进行分析，可以建立最优控制策略存在的充分条件，并揭示策略对系统状态与分布变化的敏感性。这一理论结构在刻画个体理性决策与群体整体行为之间的内在联系方面具有重要意义。

3.3 Fokker–Planck 方程与分布演化机制

Fokker–Planck 方程从概率密度层面描述系统状态的时间演化过程，是平均场理论中连接个体动力学与群体行为的关键工具。在最优控制框架下，该方程与 HJB 方程共同构成耦合系统，其中控制策略通过影响漂移与扩散项进而改变分布演化路径。分布函数不仅反映随机扰动的扩散效应，还体现个体策略在整体层面的累积结果，使系统呈现出宏观与微观相互作用的特征。对该方程解的分析能够揭示不同控制策略下系统分布的收敛性与稳定性，为评估控制效果提供重要依据。通过研究分布演化与控制策略之间的反馈关系，可以进一步理解平均场系统中个体行为与整体结构之间的动态平衡机制。

4 最优控制策略的求解方法与性质分析

4.1 解析解与近似解方法

平均场最优控制问题在形式上表现为前后向耦合的偏微分方程体系，其解析求解依赖较为严格的结构条件，例如系统动力学满足特定线性—二次型结构，或控制变量与状态分布之间存在可分离关系。在此类情形下，通过构造值函数的特定形式，可以将原问题转化为可解析求解的常微分方程组，从而获得闭式表达。然而在更一般的非线性随机系统中，漂移项与扩散项往往具有复杂依赖关系，解析解难以直接获得。研究中通常通过局部线性化、变分近似或均值替代方法对原模型进行简化处理，在保留主要动力学特征的前提下降低求解难度。针对非线性项的处理，还可借助级数展开或扰动分析构建近似解形式。数值层面上，有限差分法与谱方法通过离散化空间与时间变量，将连续问题转化为代数方程组，结合迭代算法实现逐步逼近。该类方法在精度与稳定性之间具有可调节空间，使复杂系统在可接受误差范围内获得近似最优策略，为理论分析与工程应用之间的衔接提供了重要支撑。

4.2 数值算法与计算复杂度问题

平均场最优控制问题的数值求解涉及高维状态空间与耦合方程结构，其计算复杂度不仅来源于离散化带来的维度增长，还与前后向方程之间的相互依赖密切相关。在实际计算中，前向 Fokker–Planck 方程与后向 HJB 方程需要交替迭代求解，形成典型的双向耦合结构，这一过程对初值与边界条件的敏感性较强。为提高计算效率，研究中逐渐引入分解策略，将原问题划分为若干子问题，通过交替迭代或松弛更新实现收敛。基于特征线方法的数值方案能够在一定程度上减少网格依赖，提高求解稳定性。随着计算技术的发展，机器学习方法被引入平均场控制问题，通过神经网络逼近值函数或策略函数，使高维问题在函数空间中得到有效表示。结合并行计算框架，可同时处理多个样本路径，从而显著缩短计算时间。该类方法在保证近似精度的同时，提升了算

法的可扩展性，使平均场模型在大规模系统中的应用更具可行性。

4.3 最优控制策略的稳定性与鲁棒性

在平均场框架下，最优控制策略不仅需要满足理论上的最优性条件，还需在随机扰动与模型不确定性存在的情况下保持系统行为的稳定。闭环系统的稳定性分析通常基于值函数与系统动力学之间的关系，通过构造 Lyapunov 函数或利用概率稳定性理论，对系统状态的长期演化进行刻画。当控制策略与分布演化形成一致反馈结构时，系统能够在扰动作用下逐渐收敛至稳定分布，从而体现出整体层面的稳定特征。

5 平均场最优控制的应用与拓展

5.1 复杂网络系统中的应用

在通信网络与智能交通系统中，节点数量巨大且拓扑结构动态变化，系统行为往往由局部交互叠加形成全局演化特征。平均场理论通过引入状态分布与密度函数，将个体间复杂耦合关系转化为分布层面的演化问题，使高维控制问题在可计算框架内得以处理。在通信网络中，数据流量与信道资源的分配可视为典型的平均场博弈问题，用户行为通过分布函数反映整体负载状态，控制策略据此实现动态调整，从而降低拥塞概率并提升吞吐效率。在智能交通系统中，车辆的行驶决策与路网状态之间形成反馈关系，平均场方法能够刻画交通密度演化过程，并在此基础上构建路径优化与信号控制策略，实现路网效率与安全性的协同提升。该类方法在处理大规模异构节点系统时表现出良好的扩展性，能够在不依赖全局信息的条件下实现近似最优控制，为复杂网络的分布式调度提供了可靠理论支撑。

5.2 金融工程中的决策模型

金融市场中个体决策行为的集聚效应对价格波动与风险扩散具有重要影响，传统模型往往难以同时兼顾个体异质性与群体动态特征。平均场理论通过构建基于概率分布的状态描述，将投资者行为与市场整体演化过程联系起来，使最优控制问题具备更加真实的经济含义。在投资组合优化中，资产价格不仅受随机扰动影响，还与市场参与者的整体策略分布密切相关，平均场模型能够反映这一内生反馈机制，从而使控制策略更具前瞻性。在风险控制问题中，通过分析分布演化方程，可识别系统性风险的积累路径，并据此设计风险约束与调节机制，实现收益与风险之间的动态平衡。该方法在处理大规模投资主体时能够有效降低模型复杂度，同时保留市场结构的关键特征，为多主体金融决策提供了统一分析框架，有助于提升模型解释力与策略稳定性。

5.3 智能系统与多智能体协同控制

多智能体系统中个体之间的协同与竞争关系呈现出显著的非线性与分布依赖特征，系统性能往往取决于群体行为的整体协调程度。平均场方法通过将个体策略映射到群体分布，使复杂的多体交互问题转化为分布控制问题，从而在理论上实现降维处理。在无人系统协同控制中，个体决策需要在局部信息条件下实现全局目标，平均场模型能够提供统一的策略更新机制，使各智能体在分布反馈作用下逐步收敛至均衡状态。在智能制造场景中，生产单元之间的资源竞争与协作关系可通过平均场控制进行建模，从而实现生产调度与能耗优化的协调统一。该类方法在保证系统稳定性的同时，提高了控制策略的自适应能力，使系统能够在动态环境中保持高效运行。随着人工智能技术的发展，平均场理论与数据驱动方法的融合进一步拓展了多智能体控制的研究边界，为复杂系统的智能化演进提供了新的路径。

6 结语

平均场理论为非线性随机系统最优控制问题提供了系统化的分析框架，通过将个体行为与群体分布相结合，有效解决了大规模系统中的复杂耦合问题。在理论层面，HJB 方程与 Fokker–Planck 方程的耦合结构揭示了最优控制的内在机理；在方法层面，数值算法与近似策略为实际求解提供了可行路径；在应用层面，该理论在网络系统、金融工程及智能控制等领域展现出重要价值。未来研究可进一步关注高维系统中的计算效率问题，以及数据驱动方法与平均场理论的融合，以推动复杂系统控制理论向更广泛的实际场景拓展。

参考文献

[1] 杨飞飞.大型网络及其资源管理的平均场理论与宏观计算技术研究[D].燕山大学,2016.

[2] 樊瑞娜.共享单车系统的平均场理论与闭排队网络研究[D].燕山大学,2020.

[3] 辛超楠.基于平均场理论的大型排队网络的稳定性研究[D].华北水利水电大学,2022.

[4] 白雪.基于解耦—重耦合降维模型的非线性动力学网络控制算法研究及应用[D].西安建筑科技大学,2024.

[5] 董苏雅拉图.基于平均场理论的信息传播模型研究[D].北京工业大学,2018.