

$$E_{or2} = \frac{V_1 + V_2}{V} \times 100\%$$

公式中： $E_{or2}$ 为剩余油驱油采收率，%； $V_1$ 为渗吸驱油剂驱油期间出油量，mL； $V_2$ 为后续盐水驱出油量，mL； $V$ 为剩余油量，mL。

## 4 结果与讨论

### 4.1 渗吸驱油剂稳定性评价结果

选用纳米  $Al_2O_3$  (分析纯) 和 0.05%、0.10%、0.20%、0.30%、0.40% 的阴离子表面活性剂(十二烷基硫酸钠水溶液)(化学纯)进行配制渗吸驱油剂,在高温 80℃、高矿化度 20000mg/L 条件下进行表面张力测试,实验结果表明,在实验测定的浓度范围内,表面活性剂的浓度对体系界面张力有一定的影响,在同温度下,0.2% 的阴离子表面活性剂界面张力值最低,效果最好。

选用 0.2% 的阴离子表面活性剂 + 纳米  $Al_2O_3$  (分析纯) 配制成渗吸驱油剂 A 进行界面张力、粘度稳定性分析,在高温 95℃、高矿化度 20000mg/L、条件下进行对渗吸驱油剂 A 界面张力、粘度进行监测,90 天后,该体系粘度保留率 80% 以上,界面张力达到 3-10 数量级,长期稳定性达到标准要求。

### 4.2 渗吸驱油剂 A 的洗油效率评价结果

选取 CP7 井地层砂与原油按照 7:1 的比例混合均匀,配制含油砂,其中原油密度  $0.83g/cm^3$ ,质量 4.076g。将混合后的含油砂放入恒温 70℃ 电热恒温烘箱中老化 72h 并放入 100ml 刻度洗油瓶中,加入渗吸驱油剂 A 至瓶口上部刻度 4.8ml 刻度线处,放入 80℃ 的电热恒温烘箱中,保温 5d,读取洗出油的体积量 1.0mL。计算最终洗油效率为 20.36%。可知,渗吸驱油剂 A 在 CP7 井油砂中具有较好的洗油效果。

### 4.3 渗吸驱油剂 A 的渗吸效率评价结果

将人造岩心放入岩心饱和油装置夹持器中,加上环压(32MPa),连续抽真空 24h。以 0.01~0.03mL/min 的注入速度,温度由 40℃ 不断提升至 120℃,开始饱和油,饱和油量 1.24mL。将饱和过原油的岩心放入渗吸瓶中,加入渗吸驱油剂 A,在恒温 80℃ 电热恒温烘箱中,每隔一段时间计量渗吸量,至最终渗吸油量为 0.38mL。研究发现岩心采收率呈现上升趋势,并最终趋于稳定,岩心渗吸采收率为 30.65%。可知,渗吸驱油剂 A 在低渗透岩心中具有较好的渗吸效果。

### 4.4 渗吸驱油剂 A 的驱替效率评价结果

选用填砂模型,按照前文的驱替实验方法,水驱至产出端不再出油,得到残余油状态,再通过渗吸驱油剂 A 对

残余油的填砂模型进行驱替。实验表明,在残余油状态下,随着渗吸驱油剂 A 的不断注入,压力快速上升,0.3PV 压力达到最高 5.5MPa,说明随着渗吸驱油剂 A 的注入,将水驱未能动用的残余油驱替出来,最终在注入体积为 0.55PV 时剩余油采收率达到了 9.2%。后续水驱中,岩心中的渗吸驱油剂 A 通过渗吸作用不断剥离孔道和壁面的原油,并被后续的注入水携带采出,最终在 2.13PV 时达到了 13.11% 的最大采收率。可知,渗吸驱油剂 A 具有较高的剥离油膜作用,该复配体系可作为较好的驱油剂用于低渗油藏针对剩余油开采中去。

## 5 结语

选用纳米  $Al_2O_3$  + 阴离子表面活性剂进行配制渗吸驱油剂能有效降低界面张力,其中纳米  $Al_2O_3$  + 0.2% 阴离子表面活性剂配制的渗吸驱油剂 A 效果最好,界面张力稳定性、粘度稳定性均满足长期稳定性标准。

在洗油、渗析和驱替实验中,渗吸驱油剂 A 的效率分别为 20.36%、30.65% 和 13.11%,均具有较好的效果,和较高的剥离油膜作用。对于在后期低渗储层(类似 CP7 井)的剩余油开发过程中,加入渗吸驱油剂 A 是提高采收率不错的选择。

## 参考文献

- [1] 李洪生,刘艳华,王正欣,等.高温中低渗油藏智能纳米黑卡驱提高采收率技术[J].油田化学,2024,41(03):474-482.DOI:10.19346/j.cnki.1000-4092.2024.03.014.
- [2] 邓健.压驱注水技术在复杂断块低渗油藏实践与认识[J].当代化工研究,2025,(14):85-87.DOI:10.20087/j.cnki.1672-8114.2025.14.028.
- [3] 谢江,叶剑川.压驱注水,唤醒老油田[J].中国石油石化,2025,(16):54-55.
- [4] 张军涛,王猛,吴金桥.一种新型纳米渗吸剂合成与压驱工艺研究[J].应用化工,2021,50(05):1239-1244.DOI:10.16581/j.cnki.issn1671-3206.20210316.001.
- [5] 朱争,党海龙,崔鹏兴,等.低渗透油藏蓄能增渗压力规律数值模拟[J].新疆石油天然气,2023,19(04):56-62.
- [6] Deng S ,Yu G ,Jiang Z , et al.Destabilization of oil droplets in produced water from ASP flooding[J].Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects,2004,252(2):113-119.
- [7] 张尚明,程中疆,金萍,等.准噶尔盆地西北缘车排7井区八道湾组顶部有利储层分布预测[J].特种油气藏,2021,28(03):40-46.
- [8] 曾庆梓,彭立才,刘左航,等.准噶尔盆地西北缘车排7井区八道湾组顶部沉积相特征[J].中国科技论文,2021,16(09):948-954.

# A brief analysis of the resonant standing wave of a fixed string at both ends

Tongshuang Liu

Nuclear Medicine Department, First Qiqihar Hospital, Qiqihar, Heilongjiang, 161005, China

## Abstract

After analyzing the frequency and energy of the resonant standing waves generated by the fixed strings at both ends under different external excitations, four special vibration laws of “strings” were described. The wavelength and frequency expressions of the resonant standing waves produced by these four types of string vibrations were derived. The relationship between the resonant frequency of the string and its natural frequency was given. At the same time, it was proposed that the standing wave is transmitted to the outside by the lateral push of the medium by the vibration of the wave belly. And the view that when the excitation wave is continuous, the standing wave will remain constant and transmit vibration energy to the outside.

## Keywords

Fixed strings at both ends; string natural frequency; string resonance standing wave; string vibration analysis

# 对两端固定弦共振驻波特性的分析

刘同双

黑龙江省齐齐哈尔市第一医院核医学科, 中国 · 黑龙江 齐齐哈尔 161005

## 摘要

经过对两端固定弦受不同外部激励时发生弦共振驻波频率及能量的分析, 叙述了四种特殊“弦”振动规律, 推导出这四种弦振动产生共振驻波时波长及频率表示式, 给出弦的共振频率与弦固有频率的关系, 同时提出驻波由波腹振动横向推动介质把驻波的能量传向外界, 和在激励波不停地情况下, 驻波会永远保持不变并向外界传出振动能量的观点。

## 关键词

两端固定弦; 弦固有频率; 弦共振驻波; 弦振动分析

## 1 引言

两端固定弦是指一段又细又柔软的弹性长线张紧于两个固定点之间。对于此种弦振动的研究, 有助于我们理解这些特殊“弦”的振动特点与机制。文中以琴弦的振动为实例, 对弦受不同外部激励时发生的弦共振进行分类分析, 叙述了四种特殊“弦”振动原理, 推导出这四种弦振动产生共振驻波时波长及频率表示式, 分析给出弦的共振频率与弦固有频率的关系, 提出驻波通过介质把驻波振动的能量传向外界的观点。

## 2 单脉冲激励时两端固定弦振动波

有一由理想柔软的两端固定细弦, 两支点连线方向取为  $x$  轴, 与  $x$  轴垂直的方向取为  $y$  轴, 如图 1 所示。

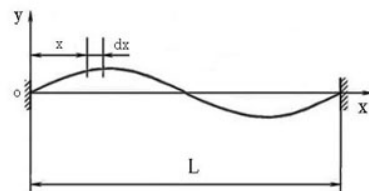


图 1 两端固定弦振动示意图

当在弦上加一个激励, 如同弹一下琴弦一样, 琴弦就会横向振动起来, 弦开始振动产生一个主频波和多个谐频波一起振动, 振动的强度会因内外部阻尼而衰减, 逐渐使弦振动停止。其中主频会持续振动一段时间才停下来, 这个振动频率称为弦的固有振动频率。弦上固有频率振动波是弦上所有振动波中频率最小的具有完整波形的正弦波, 如图 1 所示, 波长等于整个弦长 (取弦固有频率振动的一个波长作为弦长进行研究)。

设弦的长度为  $L$ , 线密度为  $\rho$ , 弦的张力为  $T$ , 弦上横波从  $o$  点向  $x$  方向传播速度为  $\lambda$  为固有频率振动波的波长, 则  $\lambda = L$  (1)

【作者简介】刘同双 (1964-), 男, 黑龙江省齐齐哈尔市, 本科, 高级工程师, 主要从事医疗电子仪器设备使用及维修工作。

$$\text{弦的固有频率为 } f_0, \quad f_0 = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{L} \quad (2)$$

分析结果 1: 当弦受到单脉冲激励时, 弦的振动主要是固有频率振动, 频率为  $f_0 = \frac{v}{L}$ 。

### 3 持续脉冲激励时两端固定弦振动波

当在弦上外加一个持续的泛频振动源激励, 随时维持弦振动所需要各种主频波及谐频波的能量补充, 弦可以随多个频率的激励而产生相应的振动。例如, 拉动一个琴弓激励琴弦横向振动, 其中有频率与弦本身固有振动频率相近或相同的多个振动持续作用在弦上, 弦的幅度不再衰减, 逐渐加强能稳定地保持振动。这就是弦与外激励波产生了同频共振与谐振。

接下来, 对一小段弦线微元  $dx$  进行受力分析, 如图 1 所示, 运用牛顿第二定律, 可得在  $y$  轴方向的运动微分方程

$$\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

若令  $v^2 = T/\rho$ , 上式可写为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (3)$$

上述弦振动的方程  $y(x, t)$  可以分解为空间函数与时间函数的乘积。

$$y(x,t) = X(x)Y(t)$$

其中  $X(x)$  是振型函数, 它表示整个弦的振动形态, 而  $Y(t)$  表征点的振动规律。

对方程 (3) 进行分离变量可得如下两方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \omega^2 Y = 0$$

$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \beta^2 X = 0 \quad \beta = \frac{\omega}{v}, \quad \omega = 2\pi f, \quad v$  为横波传播速度可解得

$$Y(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

$$X(x) = C \sin \beta x + D \cos \beta x$$

弦振动方程可表示为

$$y(x,t) = X(x)Y(t) = [C \sin \beta x + D \cos \beta x][A \sin \omega t + B \cos \omega t]$$

弦的运动还必须满足边界条件

$$y(0,t) = y(L,t) = 0$$

得  $D = 0 \quad \sin \beta L = 0$

这就是弦振动的特征方程。

由此可确定一些列特征值  $\beta_n = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, \dots$  与此相应, 可确定一系列特征振型函数。

$$X_n(x) = C \sin \frac{n\pi x}{L} \quad n = 1, 2, \dots$$

与各个特征值相对应, 可确定系统的各阶自然频率

$$\omega_n = v\beta_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{T/\rho} \quad n = 1, 2, \dots$$

弦对应于各阶自然频率的主振动方程为

$$y_n(x,t) = X_n(x)Y_n(t) = \sin \frac{n\pi x}{L} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t)$$

其中各个  $A_n$  与  $B_n$  由运动的初始条件确定。这个主振动方程的每一项可写成

$$y_n(x,t) = N_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin (\omega_n t + \delta_n) \quad (4)$$

$$\text{其中 } N_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \delta_n = \arctan \frac{B_n}{A_n}$$

最后得到的这个方程  $y_n(x,t)$  是由一系列频率不同 (成倍增长)、相位不同、振幅不同的驻波叠加而成的合成波。

由上述对两端固定弦振动求解得到的振动方程 (4) 可知, 弦的任何可能的振动状态都可以视为本征振动的线性叠加, 对这个振动方程进行分析可知, 当点  $x$  的位置: 在  $x = 0, \frac{L}{n}, \frac{2L}{n}, \dots, \frac{(n-1)L}{n}, L$  的点的振幅为 0, 称为节点或波节; 在  $x = \frac{L}{2n}, \frac{3L}{2n}, \frac{5L}{2n}, \dots, \frac{(2n-1)L}{2n}$  的点的振幅为  $N_n$ , 达到最大值, 称为振动波的波腹。振动波如图 2 所示。这种包含节点的振动波称为驻波。

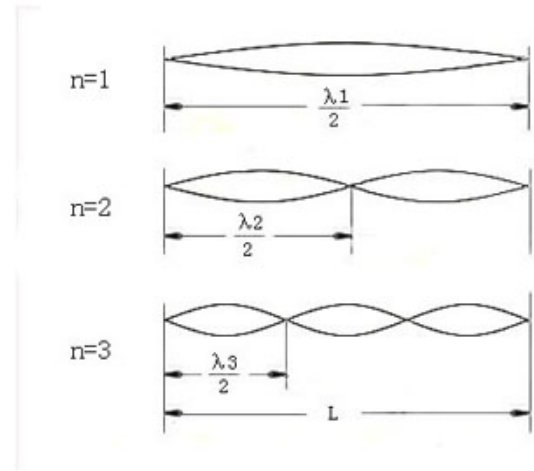


图2 两端固定弦振动示意图

图 2 给出了  $n$  分别为 1、2、3 的三种弦振动的情形。从图 2 不难看出, 对于不同的  $n$ , 波的形状不同, 频率也不同, 对应于  $n=1$  的波, 称为基波, 对应于  $n=2, 3, \dots$  的波称为二次谐波、三次谐波, 等等。弦上有  $n$  个半波区, 弦长等于半波长的整数倍, 即  $n$  个半波组成整个弦长  $L$ 。

$$\text{即 } L = n \frac{\lambda_n}{2},$$

$$\text{得出: 弦共振驻波波长为 } \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (5)$$

假设此时弦振动的频率为  $f_n$ , 弦上横波的传播的速度  $v$

$$\text{得出: 弦共振驻波频率为 } f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2} \frac{v}{L} \quad (6)$$

$$\text{由公式 (2), 弦的固有频率为 } f_0 = \frac{v}{L}, \quad \text{可知 } f_n = \frac{n}{2} f_0 \quad (7)$$

公式 (7) 说明弦共振驻波频率  $f_n$  等于弦固有频率的  $\frac{n}{2}$  倍。

分析结果 2: 当弦受到持续脉冲激励时, 弦产生驻波共振, 频率等于弦固有频率的  $\frac{n}{2}$  倍。

### 4 两列同频率行波叠加成的驻波

驻波也可描述为频率相同、传输方向相反的两列波，沿传输线方向形成的一种分布状态。其中的一个波一般是另一个波的反射波。两者振动相加的点出现波腹，在两者振动相减的点形成波节。在波形上看波节和波腹的位置始终不变，形成了驻波。

有两列行波

$$y_1 = A \sin(\omega t - kx)$$

$$y_2 = A \sin(\omega t + kx)$$

参考图1中弦的振动图，其中 $y_1$ 是沿 $x$ 方向运行的正向波， $y_2$ 是 $y_1$ 向 $x$ 方向运行到终点后返回的反射波，两列波角频率相同，运行方向相反。

接下来分析两个波在弦上的叠加情况

用三角函数和差化积公式  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

推导出叠加波为  $y = y_1 + y_2 = 2A \cos kx \cdot \sin \omega t$  ( $\omega = 2\pi f$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ )

从叠加结果的波函数可以看出，在弦上角频率相同的正反两列波叠加成一列角频率不变的驻波。当弦上的行波 $y_1$ 频率正好与固定弦固有频率接近或相等，沿 $x$ 方向运行，且弦长 $L$ 为半波长 $\lambda$ 的整数倍时，在固定弦上就可以产生驻波共振。

如图2所示，共振驻波还会产生次级谐波。

$$\text{共振驻波及谐波均满足 } L = n \frac{\lambda_n}{2}, \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$\text{由公式 } f = \frac{v}{\lambda}, \quad \text{可导出弦上共振驻波频率 } f_n = \frac{n}{2} \frac{v}{L}$$

$$\text{由公式 (2), 弦的固有频率为 } f_0 = \frac{v}{L}, \quad \text{可知 } f_n = \frac{n}{2} f_0 \quad (8)$$

从推导结果看出的弦上共振驻波频率公式(8)与公式(7)相同，由此说明在两端固定弦上方向相反的两列行波叠加成的驻波与持续脉冲激励时两端固定弦振动波相同，都是一个与弦固有频率相同或相近的一个振动源的激励而产生的驻波振动结果。

分析结果3：由两列频率相同方向相反的行波在弦上叠加产生驻波共振时，弦共振驻波频率等于弦固有频率的 $\frac{n}{2}$ 倍。

### 5 两个不同频率行波在弦上叠加形成的波

两个不同频率的波在弦上叠加时，各自保持原有的频率、波长和振动方向等特性，总波形为各个波独立作用的代数和。

现有两列不同角频率的行波  $y_1 = A \sin(\omega_1 t)$

$$y_2 = A \sin(\omega_2 t)$$

设 $y_1$ 和 $y_2$ 都属于弦固有频率振动及谐振动范围内的任一个行波，那么它们之间的相互作用合成的波，均可以使弦产生振动或产生共振驻波及谐波。

根据三角函数和差化积公式  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

两个波在弦上叠加波为

$$y_2 + y_1 = A \sin(\omega_2 t) + A \sin(\omega_1 t) = 2A \sin \frac{(\omega_2 + \omega_1) \cdot t}{2} \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1) \cdot t}{2} \quad (9)$$

其中叠加相加的波  $\sin \frac{(\omega_2 + \omega_1)}{2} t$  随 $t$ 变化较快称为主波(类似经典高频载波项)

叠加相减的波  $\cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2} t$  随 $t$ 变化较慢称为拍波(类似经典调制波项)

由公式(9)可以看出，由两个不同频率的行波相互叠加形成的波，其中主波频率由原来两个行波频率相加而成，角频率等于 $(\omega_2 + \omega_1)/2$ ；拍波频率由原来两个行波频率相减而成，角频率等于 $(\omega_2 - \omega_1)/2$ 。主波频率远高于拍波频率，如图3所示。

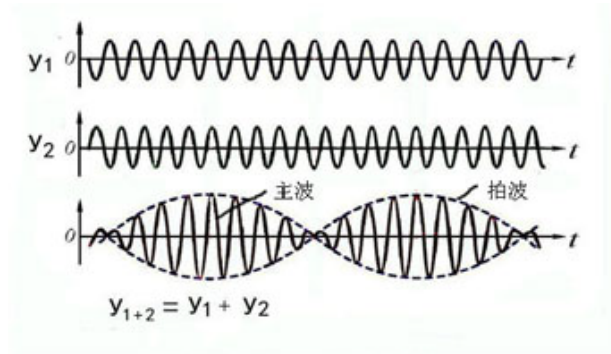


图3 两个不同频率行波的叠加波

因为在这一个合成拍波周期内包含两个波腹，拍的包络线振幅在一个周期内会有两次极大值，而这两次极大值就对应两拍。对于弦来说是拍波以2倍角频率的振动作用在弦上，有效拍波角频率为 $(\omega_2 - \omega_1)$ 。

当拍波角频率 $(\omega_2 - \omega_1)$ 接近弦固有角频率时， $(\omega_2 + \omega_1)/2$ 远高于弦的固有频率，对弦的共振不起作用，设 $\delta_1 = \frac{(\omega_2 + \omega_1)}{2}$ 对弦的有效激励波方程由方程(9)改为

$$y = 2A \sin \delta_1 \cdot t \cos(\omega_2 - \omega_1) \cdot t \quad (10)$$

同理，当 $\frac{(\omega_2 + \omega_1)}{2}$ 接近弦固有角频率时， $(\omega_2 - \omega_1)$ 远低于弦固有频率，

对弦的共振不起作用，设 $\delta_2 = (\omega_2 - \omega_1)$ 对弦的有效激励波方程由方程(9)改为

$$y = 2A \cos \delta_2 \cdot t \sin \frac{(\omega_2 + \omega_1) \cdot t}{2} \quad (11)$$

这两个合成波方程(10)和方程(11)对弦的作用，相当于单脉冲激励与持续脉冲激励组合共同作用在弦上，将各自在合成频率接近或等于弦固有频率时产生弦驻波共振。按图2所示，其中任一个波使弦产生驻波共振频率都等于弦固有频率的 $\frac{n}{2}$ 倍。