

Integrating Intuition and Logic: Tracing the Origin of Thought in Exploring Proof Approaches for the Pythagorean Theorem

Lingya Li

Baiyun Middle School, Taizhou City, Taizhou, Zhejiang, 318000, China

Abstract

Following Euclid's general approach to investigating geometric propositions and adhering to the standard steps for verifying a proposition as true—analyzing the premise and conclusion, constructing a diagram, and conducting deductive proof—this study employs geometric analysis to explore the interrelationship between the premise and conclusion of the Pythagorean Theorem, tracing the cognitive origins of its proof methods. By independently constructing geometric diagrams based on the geometric interpretations of algebraic expressions and leveraging quantitative relationships within these diagrams, rigorous logical reasoning is applied. This harmonizes geometric intuition with algebraic deduction, achieving a perfect fusion of “number” and “shape.” Amidst the interplay of intuition and logic, the study delves into the fundamental question: How did mathematicians of ancient civilizations conceive such geometric constructions for proofs? Guiding students to engage in a dialogue between history and innovation, this research advocates that the study of geometric theorems should not only seek to “know what is true” but also to “understand why it is true” and further to “comprehend how we know why it is true.” This approach cultivates rigorous mathematical thinking and stimulates students' innovative awareness.

Keywords

Pythagorean Theorem; proof methods; origin of thought

融合直观与逻辑 追根溯源——探索勾股定理证明思路的思维之源

李玲娅

台州市白云中学, 中国·浙江 台州 318000

摘要

根据欧几里得对一个几何命题探究的一般思路,按照判断一个命题是真命题的一般步骤:分析题设和结论——构造图形——推理证明.运用几何分析法,探究勾股定理的题设和结论的相互关系,探索勾股定理证明方法的思维之源.由代数式的几何意义自主构造几何图形,运用图形中的数量关系,进行严谨的逻辑推理,使几何直观与代数推理互为补充,“数”与“形”完美结合,在直观与逻辑的交织中追溯思维本源:处在古文明时代的数学家们是怎么想到构造出这样的几何图形进行证明的呢?引导学生在历史与创新的对话中走向未来,对几何定理的研究,不仅要“知其然”,而且要“知其所以然”,更能“何由以知其所以然”,培养学生严谨的数学思维,激发学生的创新意识.

关键词

勾股定理;证明方法;思维本源

1 思索勾股定理证明的困惑之源

人教版义务教育教科书八年级上册第十七章《勾股定理》是初中数学的重点内容之一,教科书通过介绍毕达哥拉斯发现勾股定理的故事,提出猜想,再到介绍赵爽弦图的“出入相补法”,证明勾股定理.引导学生像数学家一样,经历从实际问题中发现和提出问题、分析和解决问题的数学研究过程,激发学生对勾股定理的学习兴趣与热情,并对世界上

500多种关于勾股定理的神奇证明方法产生了极大的好奇心.

教学中,我们不难发现:大多数学生在去除网络后,将勾股定理作为一个独立命题进行证明时存在很大困难.

继而,我们不得不去做一下更深入的思考:处在古文明时代的数学家们是怎么想到构造出这样的几何图形进行证明的呢?他们思考的起点又是什么呢?

本文结合教科书中的“阅读与思考”,根据欧几里得对一个几何命题探究的一般思路,按照判断一个命题是真命题的一般路径:分析题设和结论——构造图形——推理证明.结合八年级学生的思维水平,运用几何分析法,根据给定命题的题设和结论,探究条件与结论的相互关系.从结论

【作者简介】李玲娅(1975-),女,本科,从事初中数学课堂教学教材教法研究.

出发,根据代数式的几何意义自主构造几何图形,运用图形中的数量关系,进行严谨的逻辑推理,探索勾股定理证明方法的思维之源,引导学生对几何定理的研究,不仅要“知其然”,而且要“知其所以然”,更能“何由以知其所以然”,逐步培养学生严谨的数学溯源思维,发展学生的创新意识.

2 探寻勾股定理证明的思维之源

命题:如果直角三角形的两条直角边长分别为 a, b , 斜边长为 c , 那么 $a^2+b^2=c^2$.

分析:这个确定性命题的题设是直角三角形,是一个几何图形;结论是 $a^2+b^2=c^2$, 是一个代数式. 要证明这个命题,可以从几何图形的“形”的角度出发,探索直角三角形三边的数量关系;或者从命题的结论中的数量关系出发,“执果索因”,构造出满足结论成立的几何图形,故这是一个“数”与“形”紧密结合的问题,是一个充分融合了几何直观与逻辑推理的问题,引导学生将抽象的数学语言与直观的图形结合起来,如何“由数想形”“以形助数”“数形互译”是证明勾股定理的关键.

2.1 思路1——由数想形

观察命题的求证结论,由式子的等号左边 a^2+b^2 的特征,从代数角度考虑,联想到八上的完全平方公式 $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$. 要证明式子 $a^2+b^2=c^2$, 可转化为证明代数式 $a^2+b^2+2ab=c^2+2ab$ 成立,即 $(a+b)^2=c^2+2ab$. 因为 a, b 恰是直角三角形的两条直角边,由式子 ab 可以联想到直角三角形的面积 $\frac{1}{2}ab$, 而 $2ab$ 可以看作 $4 \times \frac{1}{2}ab$, 故要证 $a^2+b^2=c^2$, 可以转化为证明 $(a+b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{1}{2}ab$. 因此有如下两种构造图形的方法.

方法1 根据 $(a-b)^2 = c^2 - 2ab = c^2 - 4 \times \frac{1}{2}ab$, 即 $c^2 = (a-b)^2 + 4 \times \frac{1}{2}ab$, 故联想到边长为 c 的正方形的面积,等于以边长为 $a-b$ 的正方形与4个直角边分别为 a, b 的直角三角形的面积之和,此即为“赵爽弦图”,如图1.

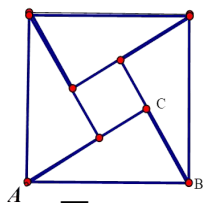


图1

方法2 根据 $(a+b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{1}{2}ab$, 联想到构造以 $a+b$ 为边长的正方形,其面积等于以边长为 c 的正方形与4个直角边分别为 a, b 的直角三角形的面积之和,得到如图2,此即为传说中的毕达哥拉斯图.

方法3 将式子 $(a+b)^2 = c^2 + 2ab$ 的左右两边同时除以2, 可得 $\frac{1}{2}(a+b)^2 = \frac{1}{2}c^2 + ab = \frac{1}{2}c^2 + 2 \times \frac{1}{2}ab$, 联想到以 $a+b$ 为边长的正方形,其面积的一半等于以边长为 c 的正方形的

一半面积与2个直角边分别为 a, b 的直角三角形面积之和,连接图2中的 BG , 得到梯形 $BCGD$, 如图3, 即得到美国第20任总统加菲尔德的证明方法,如图4.

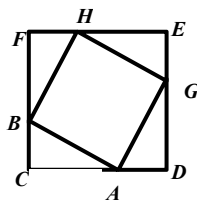


图2

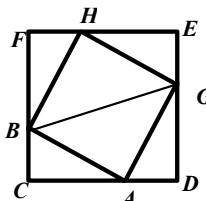


图3

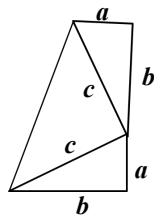


图4

这种“由数想形”的思路,通过代数公式反推几何图形构造,将抽象的代数公式,转化为具体的图形操作,巧妙地将图形的拼凑与几何的演绎融为一体,帮助学生通过直观观察理解定理本质,降低认知难度.

2.2 思路2——以形助数

将条件中的“形”与结论中的“数”结合考虑. 由 a^2, b^2, c^2 的几何意义联想到构造三个分别以 a, b, c 为边长的正方形,想办法证明边长为 a, b 的两个正方形面积之和,等于边长为 c 的正方形面积. 可以通过动手操作,进行图形的剪拼,得到新图形,再根据图形之间的面积关系进行推理说明;或通过几何图形的变换,根据面积的等量代换,进行严谨的几何推理证明,故有如下的证明方法.

方法4 将边长为 a, b 的两个正方形,通过剪拼构成边长为 c 的正方形. 根据命题的确定性,联想到裁剪出条件中的两条直角边长分别为 a, b , 斜边长为 c 的直角三角形,再进行拼凑,得到图5,根据拼接前后图形的面积保持不变,可得结论. 这就是著名的图形出入相补法,这可能也是伟大数学家刘徽与赵爽的证明思路吧!

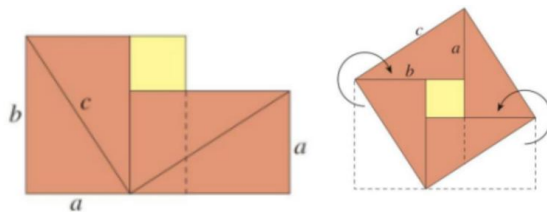


图5

方法5 要证明边长为 a, b 的两个正方形面积之和,等于边长为 c 的正方形面积. 显然,可得四边形 $CDHF$ 是矩

形,故考虑将正方形BCFG和正方形ACDE压扁到同一条边CH,可得平行四边形ACHN与平行四边形BCHM.此思路有很多种证明方法,现提供如下证明方法.

简证:如图7-6,延长GF,ED交于点H,延长QP交GF于点M,延长PA交EH于点N,连接MN.

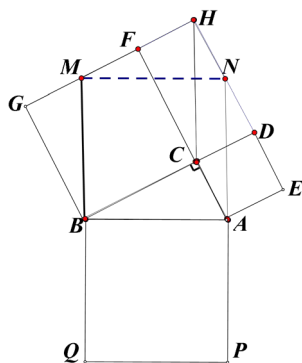


图7

由正方形ABPQ,正方形ACDE和正方形BCFG,可得AN//BM和矩形CDHF.

根据角边角,得 $\triangle MBG \cong \triangle ABC \cong \triangle ANE$,故AN=BM,GM=AC=CD=EH,

可得,四边形ABMN是正方形,且 $S_{\text{正方形ABMN}} = S_{\text{正方形ABPQ}}$.

进一步可得,四边形BCHM和四边形ACHN都是平行四边形,

根据同底等高, $S_{\text{正方形ACDE}} = S_{\square ACHN}$, $S_{\text{正方形BCFG}} = S_{\square BCHM}$.
同时, $BC=MH$, $AC=HN$,

故, $\triangle ABC \cong \triangle NMH$,

所以, $S_{\text{正方形ABPQ}} = S_{\text{正方形ABMN}} = S_{\square BCHM} + S_{\square ACHN} = S_{\text{正方形ACDE}} + S_{\text{正方形BCFG}}$,

即 $a^2 + b^2 = c^2$.

这个思路引导学生动手操作拼图或图形变换,分析几何图形变换——平移、旋转、拼接,通过观察图形特征,根据面积守恒原理,抽象出代数关系,在图形操作中,同时发展空间观念与逻辑推理.

2.3 思路3——数形互译

方法6 通过证明边长为a,b的两个正方形面积之和,等于边长为c的正方形.类比共顶角顶点的等腰三角形的“手拉手模型”,联想到构造共顶点的两个正方形构成的“手拉手模型”,通过三角形全等,再进一步证明三个正方形的面积关系.这就是古希腊数学家欧几里得的《几何原本》中的证明方法.

简证:如图8-7,过点G作 $GK \perp AB$ 于点K,交DC于点J,可得 $AD \parallel GK$.

由正方形ABCD和正方形DGHL,根据角边角定理,可得 $\triangle ADG \cong \triangle CDL$.

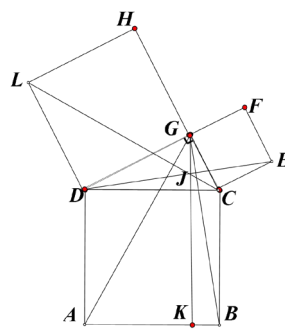


图7

因为 $CH \parallel LD$, $AD \parallel GK$,

根据同底等高, $S_{\triangle ADG} = \frac{1}{2} S_{\text{正方形ABCD}}$, $S_{\triangle CDL} = \frac{1}{2} S_{\text{正方形DGHL}}$,

所以, $S_{\text{矩形ADJK}} = S_{\text{正方形DGHL}}$.

同理, $S_{\text{矩形BCJK}} = S_{\text{正方形CEFG}}$.

所以, $S_{\text{正方形DGHL}} + S_{\text{正方形CEFG}} = S_{\text{矩形ADJK}} + S_{\text{矩形BCJK}} = S_{\text{正方形ABCD}}$,即 $a^2 + b^2 = c^2$.

这种思路是从命题结论出发,“由数想形”,以“形”为起点,构造以直角三角形的边为边的三个正方形,通过观察图形发现“数”的规律;“以形助数”,以“数”为工具,通过逻辑运算反推“形”的性质,进行演绎推理,将数与形完美地结合.

3 结语

勾股定理是人类最伟大的十个科学发现之一,搭建起了几何图形与数量关系的一座桥梁,是历史上第一个把数与形联系起来的定理,充分体现了数学中“形”与“数”的和谐统一,数形结合思想是勾股定理证明的核心,利用图形变换直观体现代数关系,根据代数公式反哺几何构造;数形结合思想不仅帮助学生突破几何与代数的割裂感,更使几何直观与代数推理互为补充,揭示同一客观规律,体现数学的内在本质的一致性.教学中,我们应该立足学生现有的知识和思维水平,依据最近发展区理论,在学生学习教科书内容的基础上,结合欧几里得探究一个几何命题的一般思路,引导学生寻找条件和结论之间的关系,追本溯源,进行自主画图,探究解题的思路和方法.通过一题多解,培养学生多维度的数学思维,在直观与逻辑的交织中追问本源,在历史与创新的对话中走向未来,激发学生的创新思维.

参考文献

- [1] 义务教育数学课程标准(2022年版)解读[M].北京师范大学出版社,2022.
- [2] 陈伟华,黄贤明.发展学生数学核心素养的定理教学实践研究以“勾股定理的逆定理”为例[J].数学通报,2024,63(1):28-32.
- [3] 刘轩.初中“勾股定理逆定理”学生理解与教师教学调查研究[D].新疆师范大学,2022.