 DOI: https://doi.org/10.12345/iptm.v4i7.30593

Research on practical path and quality cultivation mechanism of multi-solution method for textbook theorems

Shuai Jia

Nanjing Bole Middle School, Nanjing, Jiangsu, 210046, China

Abstract

The Mathematics Curriculum Standards propose that effective mathematics instruction should integrate teacher guidance with student learning, emphasizing a human-centered approach. This methodology enables students to acquire knowledge through critical thinking, apply concepts in practical contexts, and develop essential skills. Particularly during textbook theorem proofs, educators should avoid rigidly following textbook solutions. Instead, they should encourage students to actively explore innovative approaches and foster their creative problem-solving abilities. Using the proof of the converse theorem of the Pythagorean theorem as a case study, this paper details cognitive barriers students encounter during theorem verification and explores pedagogical strategies for developing alternative solution approaches, ultimately promoting holistic student development.

Keywords

teaching material; solution; literacy

教材定理多元解法挖掘的实践路径与素养培育机制研究

贾帅

南京市伯乐中学，中国・江苏 南京 210046

摘　要

《数学课程标准》提出有效的数学教学活动是教师教和学生学的统一，在教学中要以人为本，让他们获得知识，建立在自己的思考上，应用知识和形成技能，建立在自己的实践上．尤其在教材定理证明过程中，教师不应该照本宣科地按照课本上的解法引导学生思考，要让学生充分发挥个人主观能动性，让他们自己去创新新的解法．本文以勾股定理逆定理证明教学为例，具体阐述了学生在证明定理遇到的认识障碍及如何挖掘定理解法的教学过程，促进学生素养的发展．

关键词

教材；解法；素养

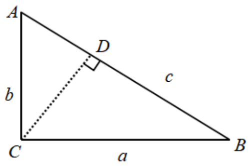
1 问题背景

在执教苏科版八年级上册 3.2《勾股定理的逆定理》时，很多老师都采取“同一法”去证明，事实上不同版本的教材上都是呈现该种方法。

这确实是一个很巧妙的方法，但是学生除非预习过课本，否则很难想到。这种方法学生之前没有接触过，理解起来也很困难。

班级学生有接近 30 名，就 1 个人想出这样的办法，有部分同学只是添加了一些辅助线。

当时在课堂上，我都选择了无视，没有继续向下引导，就直接选择了课本上的解法进行讲解，但是事后发现自己在课上确实没有顾及学生的想法，没有给学生多一点时间去思考，充分表达自己的意见。对照《2022 数学义务教育数学课程标准》对该课时的要求是：探索勾股定理及其逆定理，并能运用它们解决一些简单的实际问题，如果只是按照课本上按部就班的去教，很难完成探索这一过程目标，也不利于学生核心素养发展 [1]。



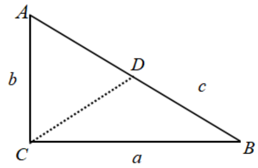


图 1

2 教学过程

问题 1：以 3 cm、4 cm、5 cm 三边画一个三角形，判断三角形的形状并尝试证明。

生 1：如果我能算出这个三角形的面积是 $6cm^2$，就能知道它是直角三角形。

【作者简介】贾帅（1992–），男，中国安徽蚌埠人，硕士，中学一级教师，从事运筹学与控制论研究。

师：具体说一说你的想法.

生 1：如果能算出面积 6cm^2，根据三角形面积公式可以推出，以 3 cm、4 cm 长度的边夹角为 90°.

师：还有其他想法吗？

生 2：如果我取 AB 中点 E，能算出 $CE=2.5\text{cm}$，那么可以推出它是直角三角形.

师：请大家根据他们的想法写一写过程.

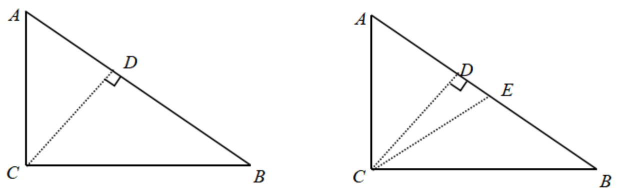


图 2

方法 1：作△ABC 的高线 CD，设 $AD=x\text{cm}$，$BD=(5-x)$ cm，$\because CD\perp AB$，$\therefore \angle ADC=\angle BDC=90°$，根据勾股定理在 Rt△$ADC$ 得，$CD^2=AC^2-AD^2$，即 $CD^2=3^2-x^2$，同理在 Rt△BDC 得，$CD^2=BC^2-BD^2$，即 $CD^2=4^2-(5-x)^2$，可得方程 $3^2-x^2=4^2-(5-x)^2$，$x=\dfrac{9}{5}$ cm，$CD=\dfrac{12}{5}$ cm，故 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot CD=6\text{cm}^2$，而 $\dfrac{1}{2}AC\cdot BC=6\text{cm}^2$，$\therefore \angle ACB=90°$.

方法 2：作△ABC 的高线 CD、中线 CE，根据方法 1 的结论：$AD=\dfrac{9}{5}$ cm，$AE=\dfrac{5}{2}$ cm，得 $DE=\dfrac{7}{10}$ cm，$\because CD=\dfrac{12}{5}$ cm，根据勾股定理在 Rt△CDE 得，$CE^2=CD^2+DE^2$，$\therefore CE=\dfrac{5}{2}$ cm，$\because CE=AE=BE$，$\therefore \angle A=\angle ACE$，$\angle B=\angle ECB$，$\because \angle A+\angle ACB+\angle B=\angle A+\angle ACE+\angle ECB+\angle B=180°$，$\therefore 2\angle ACE+2\angle ECB=180°$，$\therefore \angle ACE+\angle ECB=90°$，$\therefore \angle ACB=90°$.

师：很好！还有其他想法吗？

生 3：可以作△ABC 的角分线 AD，作 $DE\perp AB$，$DF\perp AC$，利用勾股定理，求出 AF、AE 长度，发现 $AF=AE=3\text{cm}$，故 C 点和 F 点重合，$\therefore DC\perp AC$，$\angle ACB=90°$.

生 4：可以构造一个两直角边长分别 3 cm、4 cm 的直角三角形，然后证明两个三角形全等就可以了.

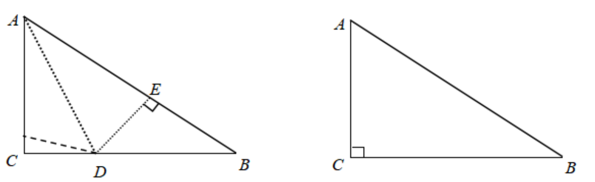


图 3

师：还有什么发现吗？

生 5：如果一个直角三角形的两边的平方和等于第三边的平方，那么这个三角形是直角三角形. 因为 $3^2+4^2=5^2$，而且我们通过证明也得到了，另外它是勾股定理的逆命题.

师：请大家尝试去证明，选择比较喜欢的方法.

问题 2：已知：在△ABC 中，$a^2+b^2=c^2$，求证：△ABC 为直角三角形.

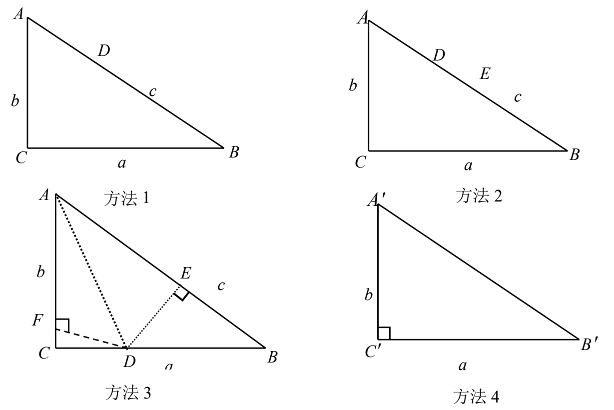


图 4

一般化方法 1：方法 1：作△ABC 的高线 CD，设 $AD=x$，$BD=c-x$，$\because CD\perp AB$，$\therefore \angle ADC=\angle BDC=90°$，根据勾股定理在 Rt△$ADC$ 得，$CD^2=AC^2-AD^2$，即 $CD^2=b^2-x^2$，同理在 Rt△BDC 得，$CD^2=BC^2-BD^2$，即 $CD^2=a^2-(c-x)^2$，可得方程 $b^2-x^2=a^2-(c-x)^2$，$x=\dfrac{b^2}{c}$，即 $AD=\dfrac{b^2}{c}$，再通过 $CD^2=AC^2-AD^2$，得 $CD=\dfrac{ab}{c}$，故 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot CD=\dfrac{1}{2}ab$，而 $\dfrac{1}{2}AC\cdot BC=\dfrac{1}{2}ab$，$\therefore \angle ACB=90°$.

一般化方法 2：作△ABC 的高线 CD、中线 CE，根据方法 1 的结论：$AD=\dfrac{b^2}{c}$，$AE=\dfrac{c}{2}$，得 $DE=\dfrac{a^2-b^2}{2c}$，$\because CD=\dfrac{ab}{c}$，根据勾股定理在 Rt△$CDE$ 得，$CE^2=CD^2+DE^2$，$\therefore CE=\dfrac{c}{2}$，$\because CE=AE=BE$，$\therefore \angle A=\angle ACE$，$\angle B=\angle ECB$，$\because \angle A+\angle ACB+\angle B=\angle A+\angle ACE+\angle ECB+\angle B=180°$，$\therefore 2\angle ACE+2\angle ECB=180°$，$\therefore \angle ACE+\angle ECB=90°$，$\therefore \angle ACB=90°$.

一般化方法 3：不妨设 $\angle ACB<90°$，（大于 90° 同样证明，等于 90° 不用证明.）作△ABC 的角分线 AD，作 $DE\perp AB$，$DF\perp AC$，$\because S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot DE=\dfrac{1}{2}BD\cdot h$，$S_{\triangle ADC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot FD=\dfrac{1}{2}CD\cdot h$（$h$ 为△ABC 以 BC 为底的三角形高），又 $\because AD$ 平分 $\angle ACE$，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，$\therefore FD=DE$，综上得 $\dfrac{CD}{DB}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{b}{c}$，故 $CD=\dfrac{ab}{b+c}$，$DB=\dfrac{ac}{b+c}$. 设 $AF=x$，易得 $AE=x$，故 $CF=b-x$，$CE=c-x$，在 Rt△DFC 中，$DF^2=CD^2-CF^2$，在 Rt△DEC，$DE^2=BD^2-CE^2$. $\because FD=DE$，$\therefore FD^2=DE^2$，故 $\left(\dfrac{ab}{b+c}\right)^2-(b-x)^2=\left(\dfrac{ac}{b+c}\right)^2-(c-x)^2$，解这个方程得 $x=b$，即 $AF=b$，故 C 点和 F 点重合，$\therefore DC\perp AC$，$\angle ACB=90°$.

一般化方法 4：构造 Rt△$A'B'C'$，∠C'=90°，$A'C'=b$，$B'C'=a$，∵∠C'=90°，根据勾股定理，可以得 $A'B'^2=a^2+b^2$，∵ $c^2=a^2+b^2$，∴ $A'B'^2=AB^2$，∴ $AB=A'B'$. 在△$A'B'C'$ 和△ABC 中，∵ $AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$BC=B'C'$，∴△ABC≌R△$A'B'C'$，∴∠C=90°，△ABC 为直角三角形.

3 案例反思

3.1 激发学生兴趣，引导学生探索

从学生心理的角度来分析，学生并不喜欢教师强加给学生定理证明的方法，学生即便勉强接受也不利于他们对课程内容的理解，更不要谈去提高学生的解决问题能力，发展学生的核心素养. 如果本节课一开始不去引导学生，直接告知采用“同一法”去证明，学生就会感觉自己的想法被忽视. 学生今后也不太乐于思考。当学生去添加了一些辅助线时，我们要给予一定时间让学生自己动手做一做、写一写、证一证，在整个教学过程中，我们可以看到学生添加辅助线的方式多种多样，证明的方法丰富多彩，这就源于教师相信学生、尊重学生 [2].

3.2 依据学生学情，渗透思想方法

教师在实施课堂教学时，要关注教材、关注数学、关注学生，我相信这三个方面是相辅相成、互相关联、互相促进的，由于班级学生学习能力比较欠缺，所以在改进的教学中我没有直接给出像课本上的引入，而是用问题 1 让学生去判断三角形的形状并尝试证明，通过完成这一问题的证明继而给出我们这节课的核心问题 2，这是根据学生学情来考虑的，也是数学思想方法的渗透，当我们没有办法解决比较复杂的一般化问题时，我们可以特殊化题目的一些条件去证明，这样可以带给我们解决问题的思路，这也是就是我们常常所说的特殊到一般的思想方法 [3].

3.3 挖掘教材定理解法，助力素养达成

本文呈现了四种解法，当然还有其他解法，比方说利用圆、相似、反证法等等，学生学过相关的内容后可以继续让其探讨，无论哪种解法都旨在提高学生分析和解决问题的能力. 换一句话来说，知识不在是目的，而是学生用来达成素养的工具，如果用“三会”的内涵去解读，我想就是用“数学的眼光去观察现实世界”，“用数学的思维思考现实世界”，具体到核心素养的表现形式就是几何直观和推理能力. 学生无意识或者下意识的去添加一些辅助线，正是该几何直观素养的表现，添加辅助线的操作，就是在感知三角形这个图形及其组成元素，有助于学生感知图形的结构特征，在头脑形成表像，为解决该问题提供一些想法. 推理能力主要从一些事实出发和命题出发，依据规则推出其他命题或者结论，虽然四种解法利用定义、基本事实、定理各不相同，但在证明的过程中涉及到大量的代数推理：有完全平方公式、等式的基本性质，三角形面积的定义，方程等等，学生在证明的过程中，都会潜移默化地培养学生重论据、合乎逻辑的思维习惯 [4].

数学作为一门课程，是培养关键能力、必备品格、树立正确的世界观、人生观、价值观的关键载体. 这个载体关键要看教师在教学过程中怎么看待，在课堂教学中我们要允许学生提出不同的看法，鼓励学生质疑，提出自己的不同方法与策略，鼓励学生独立思考，去乐于探索一些非常规的数学问题，助力学生核心素养的提高 [5].

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.全日制义务教育数学课程标准(2022年版)[M].北京：北京师范大学出版社.

[2] 杨欲前，董林伟主编. 数学教师教学用书八年级上册[Z].南京：江苏凤凰科学技术出版社.

[3] 林群，俞求是主编. 数学教师教学用书八年级下册[Z].北京：人民教育出版社.

[4] 张艳娇，深入理解内容，充分发挥定理教学的育人价以“勾股定理的逆定理”的教学为例[5].《中学数学教育》.2020(6):57-61.