

从函数单调性定义到导数应用：理论逻辑与解题公式的深度衔接

Xianghe Tang

Cao County Third Middle School, Cao County, Heze, Shandong, 274400, China

Abstract

The monotonicity of a function is one of its core properties and the cornerstone for analyzing its form and studying its variation patterns. From the static comparison based on the definition method in middle school mathematics to the dynamic analysis using derivatives in calculus, it marks a leap in mathematical thinking from beginner to advanced. This article aims to deeply analyze the complete theoretical logic chain from the definition of monotonicity of functions to the application of derivatives, reveal its inherent mathematical ideas, and systematically summarize the solving formulas and strategies based on this. Finally, typical examples are used to demonstrate its deep connection and comprehensive application, aiming to build a comprehensive and profound understanding framework for learners.

Keywords

monotonicity of functions; derivatives; Limit; Differential mean value theorem; Theoretical logic; Problem-solving model

从函数单调性定义到导数应用：理论逻辑与解题公式的深度衔接

唐相贺

曹县第三中学，中国·山东 菏泽 274400

摘要

函数的单调性是函数的核心性质之一，是分析函数形态、研究变化规律的基石。从中学数学中基于定义法的静态比较，到微积分中利用导数的动态分析，标志着数学思想从初等到高等的一次飞跃。本文旨在深度剖析从函数单调性定义到导数应用的完整理论逻辑链条，揭示其内在的数学思想，并在此基础上系统地总结解题公式与策略，最终通过典型例题展示其深度衔接与综合应用，旨在为学习者构建一个贯通、深刻的理解框架。

关键词

函数单调性；导数；极限；微分中值定理；理论逻辑；解题模型

1 引言：从“是什么”到“为什么”的认知跃迁

在初等数学中，我们通过单调性的定义来研究函数：

设函数 $f(x)$ 在区间 (I) 上有定义，如果对于 (I) 上任意两点 $(x_1 < x_2)$ ，都有：

$(f(x_1) < f(x_2))$ ，则称 $f(x)$ 在 (I) 上单调递增；

$(f(x_1) > f(x_2))$ ，则称 $f(x)$ 在 (I) 上单调递减。

这一定义直观且严谨，是认知单调性的逻辑起点。然而，其应用过程往往繁琐：需要取点、作差、变形、判号。对于复杂的函数，这种“静态”的比较方式效率低下，且难以洞

察函数在整个区间上的“动态”变化趋势。

微积分的诞生，特别是导数概念的引入，为我们提供了一把分析函数动态变化的“金钥匙”。导数 $f'(x)$ 本质上是函数在某一点处的瞬时变化率，它深刻地刻画了函数值随自变量变化的“势头”与“方向”。那么，一个自然且关键的问题便是：为什么函数的导数符号能够决定其单调性？这背后隐藏着怎样精妙的数学逻辑？回答这个问题，正是实现从机械应用解题公式到深刻理解数学理论衔接的关键。

2 理论逻辑的深度剖析：从定义到判定的桥梁

从单调性的定义到导数的判定，并非一蹴而就。其理论桥梁是微积分学的核心定理之一——拉格朗日中值定理。

2.1 逻辑起点：导数的直观意义

导数 $f'(x)$ 衡量的是函数在 (x) 点附近的“变化快慢”

【作者简介】唐相贺（1969-），中国山东菏泽人，中级，从事数学教学研究。

和“变化方向”。

当 ($f(x) > 0$) 时,意味着在 (x) 点附近,函数值有随 (x) 增加而增加的趋势。

当 ($f(x) < 0$) 时,意味着在 (x) 点附近,函数值有随 (x) 增加而减少的趋势。

这种直观的“局部”性质,是我们相信导数可以判断“整体”单调性的原始动因。但直觉需要严格的数学证明来支撑。

2.2 核心桥梁:拉格朗日中值定理

定理内容:如果函数 ($f(x)$) 在闭区间 ($[a, b]$) 上连续,在开区间 ((a, b)) 内可导,则在 ((a, b)) 内至少存在一点 (x_i),使得:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

这个定理的伟大之处在于,它在一个“整体”的区间 $[a, b]$ 上,建立起了函数值的平均变化率与区间内某一点的瞬时变化率之间的等量关系。

2.3 逻辑衔接的完成

现在,我们将单调性的定义与拉格朗日中值定理相结合,完成理论的衔接。

命题:设函数 ($f(x)$) 在区间 (I) 上可导。

如果在 (I) 上恒有 ($f(x) \geq 0$) (且不在任一子区间上恒为零),则 ($f(x)$) 在 (I) 上单调递增。

如果在 (I) 上恒有 ($f(x) \leq 0$) (且不在任一子区间上恒为零),则 ($f(x)$) 在 (I) 上单调递减。

证明(以递增情况为例):

在区间 (I) 内任意取两点 (x_1, x_2),且 ($x_1 < x_2$)。函数 ($f(x)$) 在区间 ($[x_1, x_2]$) 上满足拉格朗日中值定理的条件。因此,存在 ($\xi \in (x_1, x_2)$),使得:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

已知 ($f(\xi) \geq 0$) 且 ($x_2 - x_1 > 0$),因此:

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

由于 (x_1, x_2) 是区间 (I) 上的任意两点,根据单调递增的定义, ($f(x)$) 在 (I) 上单调递增。

逻辑链条梳理:

单调性定义(比较任意两点的函数值) \rightarrow 拉格朗日中值定理(将函数值之差与区间内某点导数相联系) \rightarrow 导数符号(决定了函数值之差的符号) \rightarrow 判定单调性。

至此,我们完成了从一个静态的、基于比较的定义,到一个动态的、基于变化率(导数)的判定法则的理论飞跃。这个过程的深刻性在于,它揭示了函数在区间上的整体性态(单调性)完全由其局部性质(每一点的导数符号)所决定,这是微分学强大力量的体现。

3 解题公式与策略的系统化衔接

理解了背后的理论逻辑,解题公式就不再是孤立的记忆点,而是有源之水,有本之木。我们可以将其系统化为一个清晰的、可操作的策略流程。

解题策略总纲:

第一步:定义域优先

任何函数性质的研究都必须始于定义域。无论是用定义法还是导数法,都必须明确函数在哪个区间上有意义。

第二步:求导与定位临界点

1. 求导:计算函数的一阶导数 ($f'(x)$)。

2. 解方程:令 ($f'(x) = 0$),解出所有实数根。这些根称为驻点。

3. 找无定义点:找出导数 ($f'(x)$) 本身不存在的点。

注:驻点和导数不存在的点统称为函数单调性的“临界点”。这些点是函数单调性可能发生改变的“嫌疑点”。

以临界点划分定义域

将整个定义域用所有临界点进行划分,得到若干个互不重叠的子区间。

第四步:判定各区间导数的符号

在每个子区间内任取一个代表点 (x_0),代入 ($f(x)$) 计算其符号。

若 ($f'(x_0) > 0$),则函数在该区间单调递增。

若 ($f'(x_0) < 0$),则函数在该区间单调递减。

综合结论

将上述结果以表格或区间并集的形式清晰地表述出来。

进阶策略与公式衔接:

第一,含参函数的单调性讨论。这是衔接过程中的难点与重点。策略是:将参数视为已知的未知数,依然遵循上述步骤,但关键在第二步和第四步。临界点依赖参数:方程 $f(x)$ 等于 0 的根可能随参数变化而存在、不存在或多寡不同。分类讨论:依据参数的不同取值范围,对临界点的个数、大小关系进行分类讨论,然后在每种情况下重复第三、四、五步。示例:讨论函数 $f(x)$ 等于 a 乘以 x 的平方加 x 加 1 的单调性。求导: $f(x)$ 等于 $2a$ 乘以 x 加 1。临界点: $2a$ 乘以 x 加 1 等于 0,推出 x 等于负的 $2a$ 分之一。这里 a 不等于 0。分类讨论:当 a 大于 0 时,导数图像是向上直线,在负无穷到负的 $2a$ 分之一区间上, $f(x)$ 小于 0,函数递减;在负的 $2a$ 分之一到正无穷区间上, $f(x)$ 大于 0,函数递增。当 a 小于 0 时,导数图像是向下直线,单调区间相反。当 a 等于 0 时, $f(x)$ 恒等于 1 大于 0,函数在全体实数上单调递增。

第二,单调性与不等式证明的衔接。理论逻辑:若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调递增,且 x_1 小于 x_2 ,则 $f(x_1)$ 小于 $f(x_2)$ 。利用这一性质,可以将数值的大小比较转化为函数数值的大小比较,进而通过研究函数的单调性来证明不等式。解题公式:欲证 $g(x)$ 大于 $h(x)$ 在区间 I 上成立。构造函数: $F(x)$ 等于 $g(x)$ 减去 $h(x)$ 。利用导数研究 $F(x)$ 在区间 I 上的单调性。结合区间端点的函数值或极限值,证明 $F(x)$ 大于 0。

第三,单调性与方程根的个数的衔接。理论逻辑:一个严格单调的区间内,函数至多有一个零点。解题公式:判断方程 $f(x)$ 等于 0 的根的个数。求导,确定函数 $f(x)$ 的所有

单调区间。计算函数 $f(x)$ 在每个单调区间端点处或趋于无穷时的函数值或极限值。利用零点存在定理,若在一个单调区间 $[m, n]$ 上, $f(m)$ 乘以 $f(n)$ 小于 0, 则该区间内有且仅有一个实根。

典型案例分析:理论与公式的综合运用

案例一:基础应用——求函数 $f(x)$ 等于 x 的三次方减去 3 乘以 x 的平方减去 9 乘以 x 加 5 的单调区间。第一步,定义域为全体实数。第二步,求导: $f'(x)$ 等于 3 乘以 x 的平方减去 6 乘以 x 减去 9, 等于 3 乘以括号 x 的平方减去 $2x$ 减去 3, 等于 3 乘以括号 x 减 3 乘以括号 x 加 1。第三步,找临界点:令 $f'(x)$ 等于 0, 得 x_1 等于负 1, x_2 等于 3。无导数不存在的点。第四步,划分区间并判号:在区间负无穷到负 1 上,取 x 等于负 2, $f(-2)$ 等于 3 乘以负 5 乘以负 1 等于 15 大于 0, 函数递增。在区间负 1 到 3 上,取 x 等于 0, $f(0)$ 等于 3 乘以负 3 乘以 1 等于负 9 小于 0, 函数递减。在区间 3 到正无穷上,取 x 等于 4, $f(4)$ 等于 3 乘以 1 乘以 5 等于 15 大于 0, 函数递增。第五步,结论:函数在区间负无穷到负 1 和区间 3 到正无穷上单调递增,在区间负 1 到 3 上单调递减。

案例二:深度衔接——证明不等式 e 的 x 次方大于 1 加 x , 其中 x 不等于 0。第一步,构造函数:令 $F(x)$ 等于 e 的 x 次方减去括号 1 加 x , 等于 e 的 x 次方减 x 减 1。第二步,研究单调性:求导: $F'(x)$ 等于 e 的 x 次方减 1。令 $F'(x)$ 等于 0, 得 x 等于 0。当 x 小于 0 时, $F'(x)$ 小于 0, 函数 $F(x)$ 在区间负无穷到 0 上单调递减。当 x 大于 0 时, $F'(x)$ 大于 0, 函数 $F(x)$ 在区间 0 到正无穷上单调递增。第三步,寻找最小值点:显然, x 等于 0 是函数 $F(x)$ 的极小值点,也是最小值点。第四步,计算最小值: $F(0)$ 等于 e 的 0 次方减 0 减 1 等于 0。第五步,得出结论:由于函数 $F(x)$ 在 x 等于 0 处取得最小值 0, 且 x 不等于 0, 故对于所有 x 不等于 0, 均有 $F(x)$ 大于 0, 即 e 的 x 次方大于 1 加 x 。此案例完美展示了如何利用导数判定单调性,进而找到函数的最值,最终解决不等式证明问题。这正是理论逻辑与解题公式深度衔接的典范。

4 常见误区与教学启示

在从定义到导数的衔接过程中,学习者常陷入以下误区:第一,忽视定义域:未在函数的自然定义域内讨论。第二,混淆条件:误认为 $f'(x)$ 大于 0 是函数 $f(x)$ 递增的充要条件。

实际上,函数 $f(x)$ 递增可推出 $f'(x)$ 大于等于 0, 但反之,若 $f'(x)$ 大于等于 0 且只在孤立点处为零例如函数 $f(x)$ 等于 x 的三次方在 x 等于 0 处,函数依然严格递增。第三,临界点归属:单调区间是开区间还是闭区间?严格来说,我们讨论的是区间内部的单调性,通常用开区间表示。但若函数在端点连续,也可以包含端点。

教学启示:重演逻辑:教学不应满足于直接给出导数判定定理,而应引导学生重演从定义到中值定理的推理过程,理解其为什么。强调思想:突出以直代曲、局部刻画整体的微积分核心思想。系统化训练:通过由易到难的例题链,帮助学生内化解题策略,并特别加强含参讨论和综合应用的训练。

5 结论

从函数单调性的静态定义,到导数应用的动态判定,是一条环环相扣、逻辑严密的理论链条。拉格朗日中值定理是这一衔接过程的拱心石,它将函数的整体性态与局部导数无缝连接。基于此理论建立起来的系统化解题策略,使得单调性的研究从一项繁琐的“体力劳动”升华为一种高效的、普适的数学工具。

深度理解这一衔接,不仅意味着掌握了一套强大的解题公式,更重要的是,它让我们领略了微积分如何以“变化”的眼光研究“变化”的规律,如何用“局部”的简单性质去把握“整体”的复杂形态。这正是数学从初等走向高等进程中,思想与方法的一次深刻而优美的升华。对于学习者而言,打通这一脉络,将为后续学习函数的极值、最值、凹凸性等更复杂的性质,打下坚实而通透的基础。

参考文献

- [1] 贺显孟. 小议函数单调性的应用 [J]. 中学生数理化(高一数学), 2025, (10): 4-5.
- [2] 张振继. 已知函数的单调性,探究参数的取值范围 [J]. 中学生数理化(高一数学), 2025, (10): 7.
- [3] 刘长柏. 抓住关键 学好函数的单调性 [J]. 中学生数理化(高一数学), 2025, (10): 8-9.
- [4] 高嘉. 函数的单调性、奇偶性、对称性及周期性考法聚焦 [J]. 中学生数理化(高一数学), 2025, (10): 17-18+2.
- [5] 郑莉芬,李学利. 巧借导数妙解三角函数题 [J]. 中学数学, 2025, (19): 122-123.