

Research on Conjugate Tooth Profile Equation of Harmonic Gear Based on Mesh Angle Function Method

Cui Zhang Ping Liu Kun Zhang

School of Engineering, Sanda University, Shanghai, 201209, China

Abstract

Harmonic gear transmission is a new type of mechanism, which relies on elastic deformation to achieve its motion principle. Based on the theory of gear meshing angle function, a method for directly solving the conjugate tooth profile of harmonic gears using this function is proposed. Based on the kinematic geometric model of harmonic gear tooth profile, solve the gear tooth profile equation; Introduce the meshing angle function expression of the tooth profile meshing principle to jointly solve the conjugate tooth profile equation of harmonic gears. This method provides a meshing angle function without the need for a tooth profile curve, simplifying the solution method and allowing for direct calculation, it provides a new and effective way to ensure that the pitch circle of the rigid wheel and the elastic pitch curve of the flexible wheel do a non sliding fit motion, and the elastic coordinated tooth profile of the flexible wheel must be accurately analyzed.

Keywords

harmonic gear; engagement angle function; conjugate tooth profile; engagement principle

基于啮合角函数方法的谐波齿轮共轭齿廓方程研究

张翠 刘平 张坤

上海杉达学院工程学院, 中国 · 上海 201209

摘要

谐波齿轮传动是一种新型机构, 它的运动原理是依靠弹性变形来实现。基于齿轮啮合角函数理论, 提出了运用该函数直接求解谐波齿轮共轭齿廓的方法。根据谐波齿轮齿廓的运动几何学模型, 求解得到该齿轮齿廓方程; 引入齿廓啮合原理的啮合角函数表达式, 共同求解谐波齿轮共轭齿廓方程。该方法给定啮合角函数, 无需给定齿廓曲线, 简化了求解方法, 可直接求出, 提供了一种新的行之有效的途径, 为保证刚轮的节圆与柔轮的弹性节曲线做无滑动的贴合运动, 柔轮的弹变协调齿廓必须精确分析。

关键词

谐波齿轮; 啮合角函数; 共轭齿廓; 啮合原理

1 引言

谐波齿轮传动具有传动比大、体积小、重量轻等特点。其有三个基本构件, 即刚轮、柔轮和波发生器。该齿轮传动的原理是柔性齿轮和刚性齿轮啮合, 在发生器的作用下, 产生变形波, 形成传动目的^[1,2]。

此前, 谐波齿轮柔轮的弹变协调齿廓通常使用包络线法。但是, 该方法需要确定柔轮的一条齿廓曲线, 并且计算过程复杂。论文提出的直接求解方法, 是针对谐波齿轮的共轭问题, 建立的啮合角函数, 通过该函数, 不用柔轮的齿廓曲线, 便可求出其共轭齿廓, 还可以分析出它的几何特性, 简化求解过程, 提供了一种新的求解方法。该方法已在圆齿轮和非圆齿轮共轭齿廓求解中得到证明^[3-8]。

2 弹变谐调齿廓方程

谐波齿轮传动是在波发生器作用下, 刚轮的节圆与柔轮的弹性节曲线做无滑动的贴合运动, 那么柔轮齿在传动时其齿廓曲线必须与弹性节曲线上各点的弹变位移相谐调, 我们把与弹变位移相谐调的齿廓称为弹变谐调齿廓, 如图 1 所示。

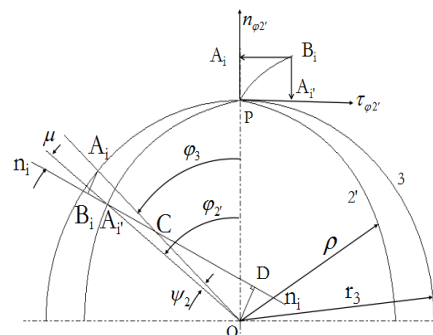


图 1 弹变谐调齿廓的计算关系图

【作者简介】张翠 (1990-), 女, 中国山东枣庄人, 硕士, 助教, 从事谐波齿轮研究。

在波发生器作用下，柔轮的弹性节曲线 2' 逐点与刚轮节圆作无滑动贴合时，其柔轮的弹性节曲线上各点相应的法向位移为 $n_{\varphi_{2'}} = A_i B_i$ ，切向位移为 $\tau_{\varphi_{2'}} = A_i B_i$ 。显然二者交点的集合即为弹变谐波齿廓。

弹变谐波齿廓方程整理如下：

$$\begin{aligned} \tau_{\varphi_{2'}} &= r_3 \sin(\mu + \psi_2) - \rho \sin \mu \\ n_{\varphi_{2'}} &= r_3 \cos(\mu + \psi_2) - \rho \cos \mu \\ \mu &= \left| \tan^{-1} \left(\frac{d\rho}{d\varphi_{2'}} / \rho \right) \right| \\ \psi_2 &= \varphi_{2'} - \frac{1}{r_3} \int_0^{\varphi_{2'}} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\phi \\ \rho &= \rho(\varphi_{2'}) (0 \leq \varphi_{2'} \leq \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (1)$$

其中， ρ 为柔轮的矢径； r_3 为刚轮的节圆半径； $\varphi_{2'}$ 为柔轮的角位移； μ 为矢径与法线 n_i-n_i 之间的夹角； φ_3 为刚轮的角位移。

3 共轭齿廓方程

如图 2 所示，取直角坐标系 $O_2x_2y_2$ 和 $O_3x_3y_3$ 分别与齿廓 2' 和齿廓 3 固联，纵坐标轴 y_2 和 y_3 与齿轮连心线 O_2O_3 重合。齿廓 2 和齿廓 3 为一对共轭齿廓，点 C2 和 C3 为一对啮合点，PP2 和 PP3 为一对做纯滚动的节曲线。啮合点 C2 和 C3 的齿廓法线与节曲线分别交于 P2 和 P3 点，啮合点 C2 和 C3 的齿廓法线与交点 P2 和 P3 处节曲线向径的垂线之间所夹的锐角为 α_2 和 α_3 。定义 α_2 和 α_3 为谐波齿轮的啮合角。显然，论文定义的谐波齿轮啮合角，在概念上不同于传统的圆齿轮和非圆齿轮啮合角的概念。

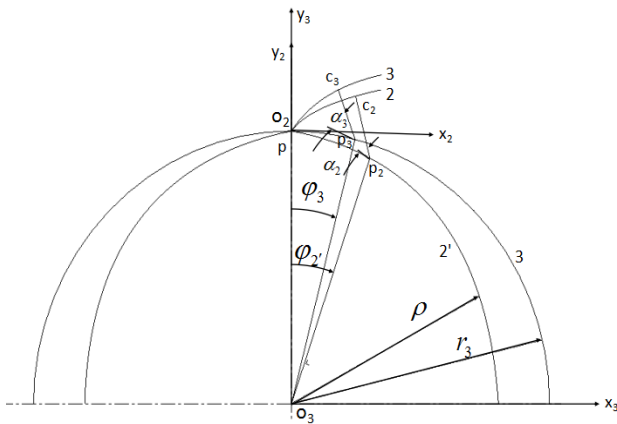


图 2 谐波齿轮啮合齿廓

根据齿廓啮合定律，有：

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_2 = \alpha_3 \\ C_2P_2 &= C_3P_3 \\ \varphi_3 r_3 &= \int_0^{\varphi_{2'}} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\phi \end{aligned} \quad (2)$$

共轭齿廓方程可写成：

$$\begin{aligned} x_2 &= \rho \sin \varphi_{2'} - l \cos(\alpha + \varphi_{2'}) \\ y_2 &= l \sin(\alpha + \varphi_{2'}) + \rho \cos \varphi_{2'} - r_3 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} x_3 &= r_3 \sin \varphi_3 - l \cos(\alpha + \varphi_3) \\ y_3 &= l \sin(\alpha + \varphi_3) + r_3 \cos \varphi_3 \end{aligned} \quad (4)$$

其中， α 为啮合角； l 为齿廓法线长； $\varphi_{2'}$ 和 φ_3 分别为齿廓法线角位置。 ρ 为节曲线 2' 对应于 $\varphi_{2'}$ 的向径， r_3 为齿轮 3 节圆的半径。当 $\varphi_{2'}=0$ 和 $\varphi_3=0$ 时， ρ 和 r_3 同时指向节点 P，且齿廓法线 $l=0$ 。为求解齿廓方便，定义函数 $\alpha(\varphi_{2'})$ 为啮合角函数，其取值范围规定为 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ 。

此时，联立 (1) 式与 (3) 式，令 $x_2 = \tau_{\varphi_{2'}}$ ， $y_2 = n_{\varphi_{2'}}$ ，则可求出 $\alpha(\varphi_{2'})$ 和 $l(\varphi_{2'})$ 的表达式，即为：

$$\alpha(\varphi_{2'}) = -\varphi_{2'} + \arctan \left[\frac{-\rho(\cos \mu + \cos \varphi_{2'}) + r_3(1 + \cos(\mu + \psi_2))}{\rho(\sin \mu + \sin \varphi_{2'}) - r_3 \sin(\mu + \psi_2)} \right] \quad (5)$$

$$\begin{aligned} l(\varphi_{2'}) &= \sqrt{2[r_3^2 + \rho^2 + r_3^2 \cos(\mu + \psi_2) + \rho^2 \cos(\mu - \varphi_{2'})} \\ &\quad - \rho r_3(\cos \mu + \cos \varphi_{2'} + \cos \psi_2 + \cos(\mu - \varphi_{2'} + \psi_2))]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (6)$$

当给定啮合角函数 $\alpha(\varphi_{2'})$ 和 $l(\varphi_{2'})$ 后，代入 (4) 式，无需柔轮齿廓曲线，即可直接求出其共轭齿廓方程，大大地方便了共轭齿廓的求解，为齿形设计开辟了新途径。

啮合角函数直接影响其几何特性和受力分析，所以，通过该函数无需知道齿廓形状，可直接分析出受力情况和几何特性，为其进一步研究提供了一种新思路。

4 柔轮模态分析

模态分析是通过计算结构的固有频率和振型，解决振动特性问题。在 Mechanica 中，通过模态分析，可以：

- ① 为设计避免结构发生共振或得到共振提供参考。
- ② 可以判断出结构对不同动力载荷是如何响应的。

模态分析不需要定义载荷，但是可以分析有预应力的模态。模态分析模式栏有两种方式来提取模态数据：模式数和频率范围内所有模式。选择模式数需要制定模态阶数和最小频率（可以选择默认 0），选择频率范围内所有模式需要制定最小频率和最大频率，来确定模态搜索范围。

在模态分析中，前面几阶模态对系统影响最大。因此，一般在工程中考虑前 10 阶模态即可。越是前面的模态，对系统振动影响最大。在机械设计中，至少应该避开前面 3 阶振型的频率。所有的动态分析，不管是时域还是频域，还是随机振动，都必须在模态分析的基础上进行。

建立柔轮有限元，并对其进行特征值分析，得出位移的变形图。如图 3 所示。模态计算结果表明：

- ① 柔轮的筒体和轮齿啮合良好，其位移形变和阵型都有非常好的规律性。
- ② 论文建立了合理的计算模型和边界条件，可用于该系统的固有特性分析及受力分析。

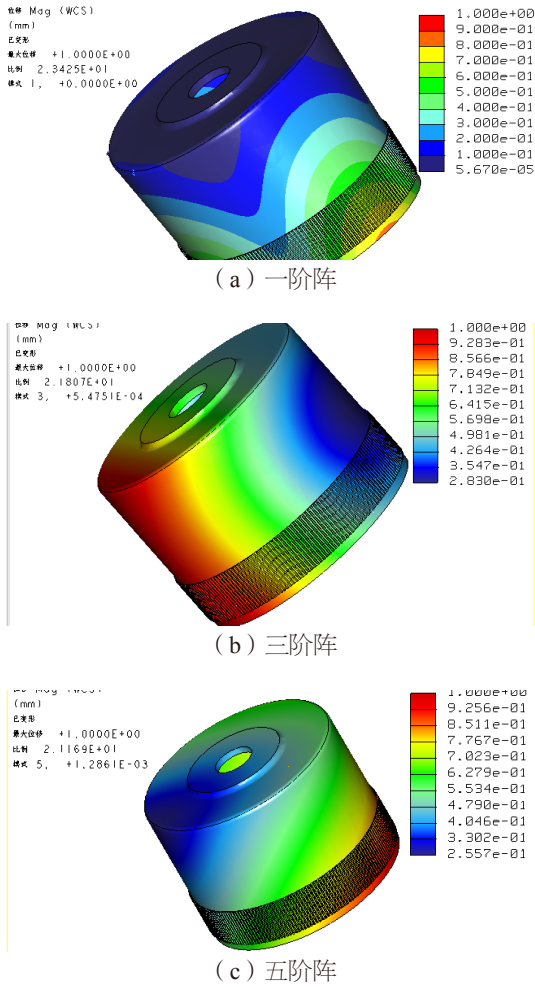


图 3 柔轮的模态分析位移变形图

5 结论

①定义了啮合角函数的概念，提出了谐波齿轮共轭齿廓直接求解方法。无需柔轮齿廓曲线，可直接求其的共轭齿廓，简化了它的求解过程，在谐波齿轮的设计计算中提出了一个新的解决方法。

②在共轭齿廓求解过程中，建立了运动几何学模型，给出了啮合角函数表达式，在基于啮合角函数的求解过程中，得到了谐波齿轮共轭齿廓方程。

③该方法的正确性已在圆齿轮齿廓和非圆齿轮齿廓得到了验证，现应用于谐波齿轮。

参考文献

- [1] 司光晨,范又功,林祖楠,等.谐波齿轮传动[M].北京:国防工业出版社,1978.
- [2] 沈允文,叶庆泰.谐波齿轮传动的理论和设计[M].北京:机械工业出版社,1985.
- [3] 李特文.齿轮啮合原理[M].卢占贤,译.上海:上海科学技术出版社,1984.
- [4] 李福生.非圆齿轮与特种齿轮传动设计[M].北京:机械工业出版社,1983.
- [5] 吴序堂.齿轮啮合原理[M].北京:机械工业出版社,1982.
- [6] 吴序堂,王贵海.非圆齿轮及非匀速比传动[M].北京:机械工业出版社,1997.
- [7] 林菁,王启义.基于啮合角函数的平面共轭齿廓方程[J].东北大学学报,1999(2):73-76.
- [8] 林菁,鄂晓宇,谢里阳.基于啮合角函数的非圆齿轮共轭齿廓直接求解[J].东北大学学报,2003(9):847-850.