

Expansion of Mechanical Research on Truss Structures in the Teaching of “Plastic Mechanics”

Xuejiao Zhang Yanping Kong

Department of Engineering Mechanics, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang, Hebei, 050043, China

Abstract

In response to the limitations of elastic-plastic analysis of three bar trusses in current plastic mechanics classroom teaching and the difficulties in student understanding, the finite element software ABAQUS is used to simulate the stress distribution and displacement response during the structural stress process, which more intuitively demonstrates the deformation and mechanical characteristics of structures at different stages of elastic-plastic deformation. At the same time, through modal analysis of the truss, vibration characteristic parameters such as natural frequency and mode shape were obtained. Combined with engineering practice, the structural stress situation was expanded, and the dynamic response of the structure under time-varying loads was analyzed. The stress situation of the truss under complex loads was more accurately predicted, providing scientific basis for structural design and optimization.

Keywords

plastic mechanics; truss structure; elastic plastic analysis; time-varying load; mechanical response

基于“塑性力学”教学中桁架结构的力学研究拓展

张雪娇 孔艳平

石家庄铁道大学工程力学系, 中国·河北 石家庄 050043

摘要

针对当前塑性力学课堂教学中三杆桁架弹塑性分析的局限性和学生理解的难点, 利用有限元软件ABAQUS模拟结构受力过程中的应力分布情况和位移响应, 更加直观地展现出弹塑性不同阶段结构的变形和力学特性。同时, 通过对桁架的模态分析, 获得其固有频率和振型等振动特性参数, 结合工程实际将结构受力情况进行拓展, 分析了时变载荷作用下结构的动力学响应, 更加精确地预测桁架在复杂荷载作用下的受力情况, 为结构设计和优化提供科学依据。

关键词

塑性力学; 桁架结构; 弹塑性分析; 时变载荷; 力学响应

1 引言

“塑性力学”主要任务是研究物体在塑性变形阶段应力和变形规律, 应力-应变的关系不再局限于线性变化, 教授内容理论性强, 学生不易理解和应用^[1]。其中, 桁架作为一种常用的结构体系, 广泛应用于各种建筑物、桥梁以及机械结构中, 在“塑性力学”理论教学中是一个经典的弹塑性分析实例。课堂教学中对一次超静定三杆桁架受竖向载荷的情况进行简单的理论推导, 虽然可得弹性极限载荷及塑性极限载荷公式, 但是学生并不能理解真实受力情况下弹塑性各个阶段结构的力学响应情况, 特别是卸载后(即不受力的情况)结构仍存在残余应力和位移, 是困扰大多数学生的理解

难题。同时, 理论推导的弹塑性解是理想状态下获得的, 实际工程当中桁架结构受力更为复杂, 理论推导并不能真正用来分析与评估结构的性能和寿命。运用弹塑性分析对结构的材料性能进行参数分析, 建立有限元模型进行复杂工况下的模拟和测试, 可以减少原材料的消耗, 同时对结构进行详细的分析和评估^[2]。因此, 我们借助有限元软件 ABAQUS 对桁架进行静力分析和动力分析, 计算出桁架在不同荷载作用下的应力分布情况, 不仅将教授内容具象化, 并且扩展到动力学部分, 更加贴合工程实际, 对于评估桁架的动态性能和稳定性具有重要意义。

2 问题描述与理论计算

一次超静定三杆桁架如图 1 所示, 三杆的材料和截面积 A 相同且杆 2 长度为 L , 在点 O 处受到竖向力 P 作用, 产生竖向位移 δ_j , 第 i 根杆名义应力为 σ_i , 应变为 ϵ_i ($i=1,2,3$), $\theta=45^\circ$ 。

【基金项目】河北省研究生教育教学改革研究项目(项目编号: YJG2023068)。

【作者简介】张雪娇(1992-), 女, 中国河北石家庄人, 博士, 讲师, 从事智能材料和结构的力学问题研究。

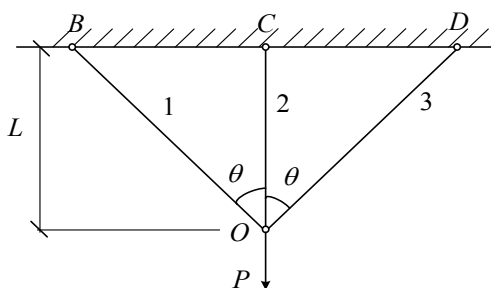


图1 三杆桁架示意图

基本假定：变形均为小变形，对截面尺寸影响较小；荷载施加阶段，惯性力对结构的影响可忽略不计^[3]。三杆桁架的弹塑性分析分为加载阶段和卸载阶段，其中加载阶段分为弹性阶段和弹塑性阶段^[4]。

2.1 弹性分析

弹性阶段本构关系：

$$\sigma_i = E\varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

各杆应力：

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{P}{A}, \quad \sigma_2 = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{P}{A} \quad (2)$$

2号杆首先进入屈服，则弹性极限位移为：

$$\delta_e = \frac{\sigma_s L}{E} \quad (3)$$

弹性极限载荷为：

$$P_e = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})A\sigma_s \quad (4)$$

2.2 弹塑性分析

2号杆屈服后，1、3杆仍处于弹性阶段，此时本构关系(1)变为：

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1, \quad \sigma_2 = \sigma_s, \quad \sigma_3 = E\varepsilon_3 \quad (5)$$

3.2 理论验证——静力学分析

将材料参数代入公式(8)和公式(11)可得弹性极限荷载 P_e 约为 4011.45kN，塑性极限荷载 P_s 约为 5672.90kN，利用 ABAQUS 软件在 O 处施加竖向荷载 4000kN、5000kN、6000kN，得到 Mises 应力和位移响应如图 2 所示，其中 $P_e < 5000\text{kN} < P_s$ 在此算例中加载后进行卸载，得到残余应力和残余应变。

图 2 展示了不同荷载作用下桁架结构的应力响应，可以看出三根杆的应力大小，其中杆 2 均为应力最大的杆件，并且在 4000kN 作用下并未达到屈服极限，而在其他两个荷载作用下均达到屈服极限，结果与公式(5)和公式(10)计算结果一致。图 3 的位移响应中可以直观地看到每根杆不同位置的位移，并且 O 点处位移随荷载增大而增大，此结

各杆应力为：

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\frac{P}{A} - \sigma_s), \quad \sigma_2 = \sigma_s \quad (6)$$

三根杆均屈服时塑性极限载荷为：

$$P_s = (1 + \sqrt{2})A\sigma_s \quad (7)$$

此时竖向位移为：

$$\delta_y = 2\varepsilon_1 L = 2 \frac{\sigma_s L}{E} = 2\delta_e \quad (8)$$

2.3 卸载分析

若荷载加载到 $P_e < P^* < P_s$ 范围内 P^* ，然后卸载到零，卸载服从增量型胡克定律，残余应力为：

$$\sigma_1^r = \sigma_3^r = -\sigma_s \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \frac{P^*}{P_e}) > 0, \quad \sigma_2^r = \sqrt{2} \cdot \sigma_s \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \frac{P^*}{P_e}) < 0 \quad (9)$$

残余应变为：

$$\varepsilon_1^r = \varepsilon_3^r = -\frac{\sigma_s}{E} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \frac{P^*}{P_e}) > 0, \quad \varepsilon_2^r = 2\varepsilon_1^r > 0 \quad (10)$$

残余位移为：

$$\delta_y^r = \varepsilon_2^r L \quad (11)$$

3 ABAQUS 数值模拟

3.1 模型建立

本节利用 ABAQUS 数值模拟软件建立三杆桁架模型进行力学仿真，并运用弹塑性理论对其结果进行分析^[5]。模型尺寸及材料参数如表 1 所示。设置边界条件固定 B、C、D 节点两个方向位移 (UX 和 UY)，采用 T2D2 桁架单元进行分析，在 O 处施加载荷，分为两种情况：静载和动载。

表 1 材料参数

材料	杆长 L m	横截面积 m^2	密度 kg/m^3	杨氏模量 GPa	泊松比	屈服强度 MPa
Q235	2	0.01	7850	210	0.3	235

果与公式(6)、公式(11)所得结果相符。

图 4 中针对卸载情况，我们将未加载时、加载后以及卸载后桁架的三个状态的位移和应力分别表示在图中，可以看到卸载后，节点 O 处的位移和应力都未完全恢复，但是比没有卸载时的值要小得多，同时可以看到残余变形和应力是三根杆共同作用的结果，且各杆的残余变形和应力同理论计算值有较好的一致性。

图 5 是 6000kN 受力情况下材料的应力应变曲线，曲线趋势很好地表现了理想弹塑性材料特点，图 6 中则是将不同应力时的总应变和塑性应变展示出来，可以看到未达到屈服时结构没有产生塑性应变，超过屈服极限 235MPa 后，塑性应变急剧增加。

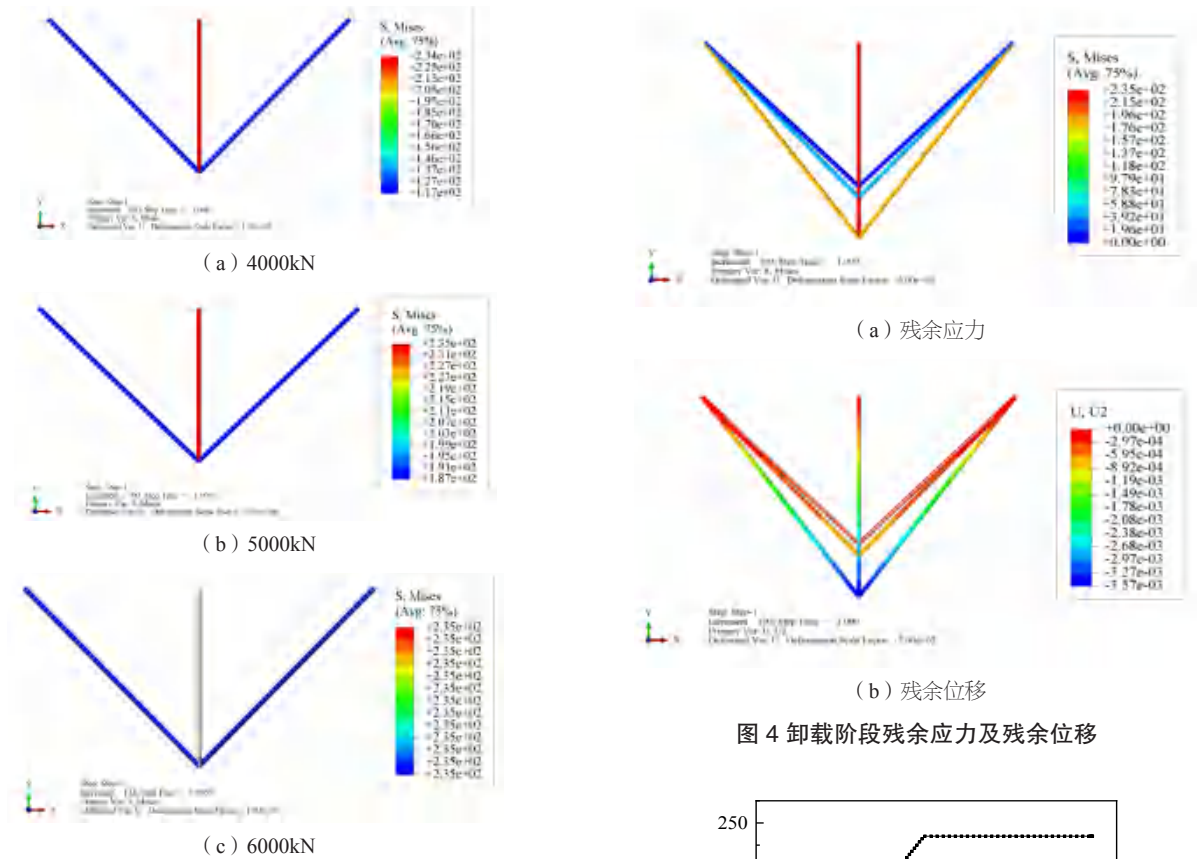


图 2 Mises 应力响应

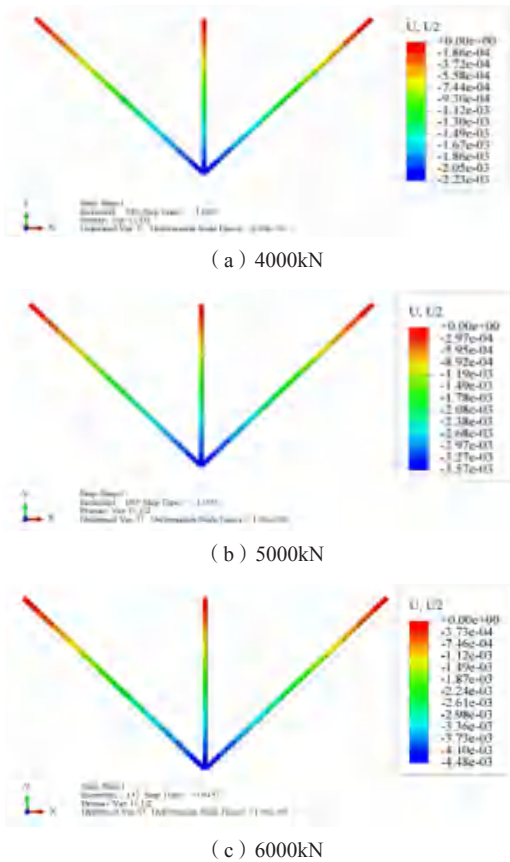


图 3 位移响应

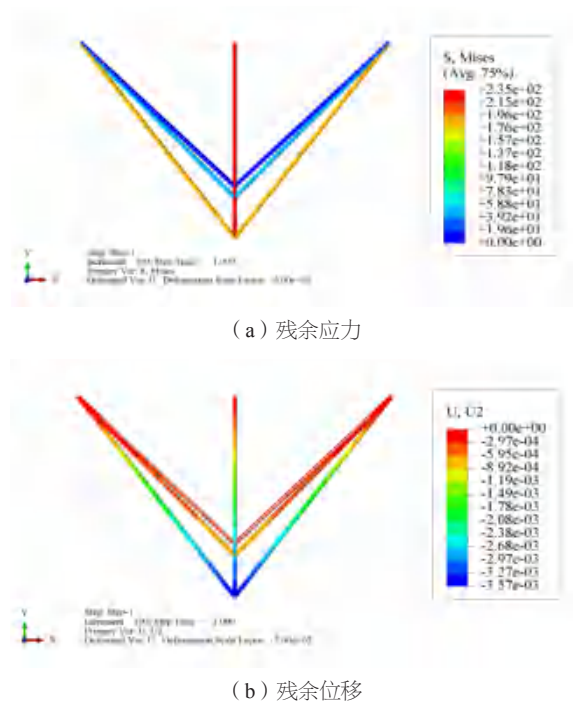


图 4 卸载阶段残余应力及残余位移

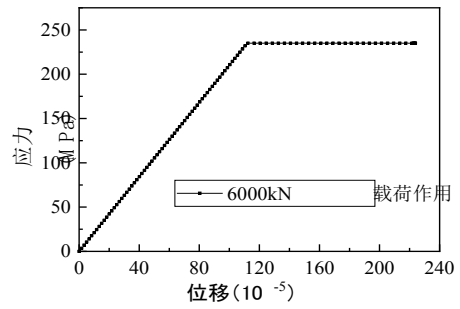


图 5 应力应变图

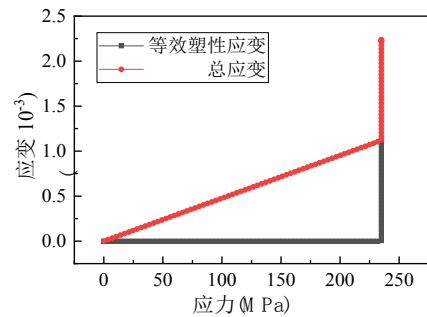


图 6 应变与等效塑性应变对比

3.3 力学拓展——动力学分析

3.3.1 振动分析

固有频率，是结构在不受外部激励时自身振动的特性。模态分析中的频率大小直接关系到结构的动态特性、设计优化以及避免共振的能力，是结构设计和分析中不可或缺的一部分。我们针对图 1 中三杆桁架进行模态分析求得固有频率，前五阶模态固有频率分别为 250.16Hz、388.69Hz、

454.86Hz、481.65Hz 和 672.63Hz，对应的特征值分别为 1571.8、2442.2、2857.7、3026.3 和 4226.3，并且给出了一阶模态作为示例，如图 7 展示了未振动和一阶模态振型，表明不受载荷作用下结构也会发生位移。

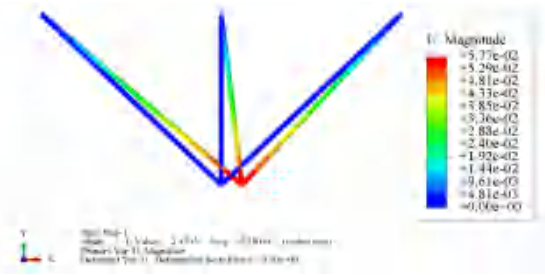


图 7 一阶模态

3.3.2 线性时变载荷分析

在工程应用当中，实际工况中荷载加载是一个动态过程，静力学分析不能准确表征其力学响应，本节利用 ABAQUS 动力学隐式方法计算了时变载荷下三杆桁架的力学响应，包括线性载荷和周期性载荷。分析中均在 O 处施加幅值为 4000kN 的载荷开展瞬态分析，获得瞬时响应与静力学加载进行对比。

图 8 结果所示，线性时变载荷作用下施加小于理想弹性极限的外载荷也会产生塑性变形，这是由于动态加载过程，载荷作用是一个积累过程，后一步会在前一步基础上继续作用，此时节点变形具有了加速度，会产生相应位移，从而比静力学加载对结构影响更大。图 9 是时变载荷 4000kN 受力情况下材料的应力应变曲线和对应塑性应变值，可以看到结构塑性应变产生的位置，应力值远小于材料屈服极限 235MPa。

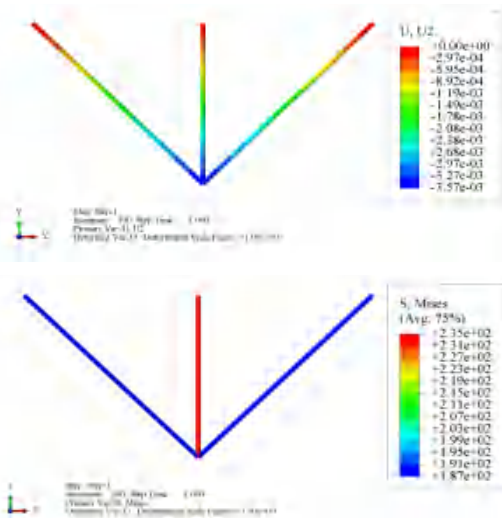


图 8 线性时变载荷下位移及应力响应

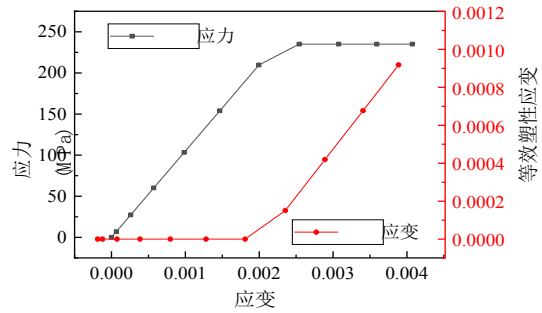


图 9 线性时变载荷下位移应力图

3.3.3 周期性时变载荷分析

除了线性载荷，工程中常见的另一种时变载荷是周期性载荷，它的作用效果和它的周期和频率密切相关。我们对三杆桁架施加 4000kN 的周期性载荷，在其固有频率附近取不同角频率进行力学分析，由表 2 可知，不同频率下 O 点处，应力应变的最大值差别较大，当角频率接近固有频率时，材料出现了塑性变形。

表 2 不同频率周期性载荷作用下三杆桁架的力学响应

角频率 krad/s	最大应变	最大应力 MPa	等效塑性应变
0.785	6.22e-4	130.6	0
1.57	1.12e-3	234.1	0
3.14	1.42e-3	235.0	2.97e-4
6.28	6.95e-4	145.9	0

4 结语

“塑性力学”是力学学科中理论性较强的一门专业核心课程，该理论重点阐述了材料在外力作用下的弹塑性表现。本文通过有限元模拟分析，直观地将三杆桁架的弹塑性分析中不同阶段的内力及位移响应进行了展示，且分析结果与弹塑性理论结果一致，便于学生分辨每个阶段的特性。通过动力学分析，获得结构不同模态下的固有频率，计算得到两种时变载荷作用下的力学响应。对比静力学分析，在时变载荷作用下三杆桁架内力分布变化，以及位移响应和等效塑性应变值，可知时变载荷作用情况对结构的力学特性有非常大的影响，实际工程中须关注动力学特性对于钢结构建筑的影响，将理论计算拓展到了工程实际中，对于学生今后的学习工作具有较大的指导意义。

参考文献

- [1] 王宏伟,付佳卉.浅谈“塑性力学”教学中的Lode应力参数拓展[J].教育教学论坛,2022(12):173-176.
- [2] 黄小川.弹塑性力学在工程中的应用[J].福建质量管理,2019(3):146.
- [3] 姜云鹏,吴明涵,孙强.钢框架在高温(火灾)下塑性力学特征分析[J].安徽建筑工业学院学报(自然科学版),2021(1):6-11.
- [4] 米海珍,胡燕妮.塑性力学[M].北京:清华大学出版社,2014.
- [5] 庄茁,由小川,廖剑晖,等.基于ABAQUS的有限元分析和应用[M].北京:清华大学出版社,2009.