Geometric Characteristic of Quasihyperbolic Distance and Logarithmic Distance in Metric Spaces

Shasha Yan

School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang, Guizhou, 550025, China

Abstract

Basing on the basic concepts and properties of quasihyperbolic distance and logarithmic distance, to describe the Geometric characteristic of quasihyperbolic distance and logarithmic distance in metric space. Using quasihyperbolic metric as main tool to study, the relation between the concepts of geodesic and quasihyperbolic geodesic and quasihyperbolic distance and logarithmic distance is discussed. It is found that an equivalent condition of geodesic in the logarithmic distance, and an inclusion relation between the quasihyperbolic open ball and metric open ball under the condition of quasihyperbolic geodesics,. The result of research shows that: The result of research shows that: let X be a metric space, $D \subseteq X$ be a nonempty subdomain, then: 1) For any three distinct points $x, y, z \in D$, and $\delta_D(x) \le \delta_D(z)$, such that $j_D(x,z) = j_D(x,y) + j_D(y,z)$ if and only if $(\delta_D(x) + |x-y|)/\delta_D(y) \le 1$ and $\delta_D(x) < \delta_D(y) \le \delta_D(z)$. 2) There is a constant $M > 0$, and $y \in \partial B_k(x,M)$, then for any $z \in J_k[x,y]$, we have $B(z, |z-y|/1+u) \subseteq B_k(x,M)$, where $u = |z-y|/\delta_D(z)$.

Keywords

quasihyperbolic metric; logarithmic distance; geodesic; metric space

度量空间中拟双曲距离与对数距离的几何特征

严沙沙

贵州师范大学数学科学学院，中国 · 贵州 贵阳 550025

摘　要

根据拟双曲距离和对数距离的基本概念及性质，刻画拟双曲距离和对数距离在度量空间中的一些几何性质。利用拟双曲度量作为研究的重要工具，再结合测地线和拟双曲测地线的概念与拟双曲距离和对数距离之间的关系，得到了对数距离测地线的一个等价条件和在拟双曲测地线的条件下，拟双曲开球与相关的度量开球之间的一个包含关系。研究结果表明：假设 X 是度量空间，$D \subseteq X$ 是一个非空子区域，则有：①任意三个不同的点 $x, y, z \in D$, 且 $\delta_D(x) \le \delta_D(z)$, 使得 $j_D(x,z) = j_D(x,y) + j_D(y,z)$ 的充要条件是 $(\delta_D(x) + |x-y|)/\delta_D(y) \le 1$ 且 $\delta_D(x) < \delta_D(y) \le \delta_D(z)$. ②存在常数 $M > 0$, $y \in \partial B_k(x,M)$, 则对于任意的 $z \in J_k[x,y]$, 有 $B(z, |z-y|/1+u) \subseteq B_k(x,M)$, 其中 $u = |z-y|/\delta_D(z)$.

关键词

拟双曲度量；对数距离；测地线；度量空间

1 引言

在论文中，假设 X 是度量空间，$D \subseteq X$ 是 X 的一个非空子区域。对于任意的 $x \in D$，记 $\delta_D(x)$ 表示点 x 到 D 的边界 ∂D 的距离，即：

$$\delta_D(x) = \inf\{|x-y| : x \in D, y \in \partial D\}$$

对于任意 $x \in D, r > 0$，令 $B(x,r) = \{y \in X : |x-y| < r\}$ 表示以 x 为心和 r 为半径的度量开球，$\partial B(x,r)$ 和 $\overline{B}(x,r)$ 分别称为度量开球 $B(x,r)$ 的边界和闭包。对于任意的两个实数 a, b，记 $a \vee b = \max\{a, b\}$, $a \wedge b = \min\{a, b\}$.

上世纪七十年代，Gehring 等人 [1] 在研究高维拟共形映射中的黎曼映射定理时引进了拟双曲度量的概念，随后拟双曲度量在欧氏空间和 Banach 空间中得到了广泛的关注和应用。同时，拟双曲度量也是研究拟共形映射理论的有力工具，有关拟双曲度量和拟共形映射的文献请参见 [2-9]。

由于欧氏空间中研究拟共形映射的很多方法在无限维 Banach 空间中并不适用，直至 20 世纪 80 年代，Väisälä 开始研究了 Banach 空间中自由拟共形映射的理论 [3-5]。这种方法的主要优点是避免使用体积积分和共形模，这允许人们研

【基金项目】贵州省科学技术基金项目（项目编号：黔科合基础〔2020〕1Y003）。

【作者简介】严沙沙（2001–），女，中国贵州仁怀人，硕士，从事复分析与拟共形映射研究。

究具有无限维的 Banach 空间和没有体积测量的度量空间中映射的拟共形性。因此，对拟双曲度量相关性质的研究得到了学者们的极大关注和广泛应用，请参见文献 [2-6]。

近些年来，国内一些学者也应用拟双曲度量作为工具进行了该领域相关的研究，如黄小军教授等人在文 [7,8] 中研究了度量空间中拟双曲度量与拟对称映射的相关性质，周青山教授研究了 Banach 空间中拟双曲映射的相关性质等。拟双曲度量的定义具体叙述如下：

定义 1.1 设 $D\subseteq X$ 是一个非空子区域，D 中可求长曲线 γ 的拟双曲长度定义为：

$$l_{k_D}(\gamma)=\int_\gamma \frac{1}{\delta_D(x)}ds$$

D 中任意两点 x,y 之间的拟双曲距离可以用 $k_D(x,y)$ 表示，定义为：

$$k_D(x,y)=\inf_\gamma l_{k_D}(\gamma)$$

其中，γ 取遍 D 中所有连接 x、y 的可求长曲线，同时称 k_D 为 D 中的拟双曲度量。

2 对数距离与测地线

1976 年，Gehring 等人在研究拟双曲度量的相关性质时，在文 [1] 中引入了对数距离的概念，论文应用 Vuorinen 在文中给出的对数距离的定义，即：

$$j_D(x,y)=\ln\left(1+\frac{|x-y|}{\delta_D(x)\wedge\delta_D(y)}\right)$$

其中任意的 $x,y\in D$. 显然 j_D 是 D 中的一个度量，同时又称对数距离 j_D 为距离商度量。记：

$$B_k(x,r)=\{y\in X:k_D(x,y)<r\},\ B_j(x,r)=\{y\in X:j_D(x,y)<r\}$$

分别表示度量空间中的拟双曲球和对数距离球。

曲线是指任意连续映射 $\gamma:[a,b]\to X$. γ 的长度定义为：

$$l(\gamma)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})|\right\}$$

其中上确界是针对 $[a,b]$ 的任意划分 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ 所取。如果 $l(\gamma)<\infty$，则称曲线 γ 是可求长的。γ 以 x 和 y 为端点的子曲线记为 $\gamma[x,y]$. 长度函数是指 $s_\gamma:[a,b]\to[0,l(\gamma)]$，它是由 $s_\gamma(t)=l(\gamma|_{[a,t]})$ 给出的。任意的可求长曲线 $\gamma:[a,b]\to X$ 都存在唯一的一条曲线 $\gamma_s:[0,l(\gamma)]\to X$ 使得 $\gamma=\gamma_s\circ s_\gamma$. 而且对于任意的 $t\in[0,l(\gamma)]$，进一步有 $l(\gamma_s[0,t])=t$. 其中 γ_s 称作曲线 γ 的弧长参数化。

定义 2.1 假设 X 是度量空间，$D\subseteq X$ 是一个非空子区域。任意的 $x,z\in D$, 设 $\tilde{a}$ 是连接 x 和 z 的可求长曲线。

①如果对于任意的 $y\in\gamma'$, 其中 $\gamma'\subseteq\gamma$, 都有：

$$j_D(x,z)=j_D(x,y)+j_D(y,z)$$

则称 $\tilde{a}$ 是 D 中的一条测地线，记为 $J[x,z]$。

②如果对于任意的 $y\in\gamma'$, 其中 $\gamma'\subseteq\gamma$, 都有：

$$k_D(x,z)=k_D(x,y)+k_D(y,z)$$

则称 $\tilde{a}$ 是 D 中的一条拟双曲测地线，记为 $J_k[x,z]$.

根据拟双曲距离和对数距离的定义，得到如下的引理。

引理 2.2 假设 X 是度量空间，$D\subseteq X$ 是非空子区域。对于任意的 $x\in D$, 有：

① $k_D(x,y)\ge\ln\left(1+\frac{|x-y|}{\delta_D(x)}\right)\ge\left|\ln\frac{\delta_D(y)}{\delta_D(x)}\right|$;

② $B\left(x,(1-e^{-M})\delta_D(x)\right)\subseteq B_k(x,M)$, 其中 $M>0$.

证明：①根据文献 [13] 很容易得到。

②设 $y\in B\left(x,(1-e^{-M})\delta_D(x)\right)$，则有：

$$|x-y|<(1-e^{-M})\delta_D(x)$$

不防设 $\tilde{a}$ 是连接 x 和 y 的一条可求长曲线，根据拟双曲距离的定义，有：

$$k_D(x,y)\le\int_\gamma\frac{1}{\delta_D(u)}ds\le\ln\frac{\delta_D(x)}{\delta_D(x)-|x-y|}=\ln\left(1+\frac{|x-y|}{\delta_D(x)-|x-y|}\right)$$

再结合上面两个不等式，可以推出 $k_D(x,y)<M$. 由于 y 的任意性，故有：

$$B\left(x,(1-e^{-M})\delta_D(x)\right)\subseteq B_k(x,M)$$

证毕。

3 主要结论及其证明

在欧氏空间中，Klén 分别在文中证明了在对数距离和拟双曲距离意义下的测地线的相关性质。证明了在欧式空间中对数距离测地线的等价条件，即任意三个不同的点 $x,y,z\in D\subset R^n$，且 $\delta_D(x)\le\delta_D(z)$，使得 $j_D(x,z)=j_D(x,y)+j_D(y,z)$ 的充要条件是 x,y,z,u 共线并且 $\delta_D(x)<\delta_D(y)<\delta_D(z)$，其中 $|u-x|=\delta_D(x)$. 文 [15] 证明了在拟双曲测地线的条件下，拟双曲开球与欧式空间定义下的开球之间的一个包含关系，即存在常数 $M>0,\ y\in\partial D_k(x,M)$，对于任意的 $z\in J_k[x,y]$，有 $B^n(z,|z-y|/1+u)\subseteq D_k(x,M)$，其中 $u=|z-y|/\delta_D(z)$. 论文将在度量空间中继续讨论在对数距离和拟双曲距离的意义下的测地线的性质，并得到如下的两个定理（定理 3.1 和定理 3.2）。

定理 3.1 假设 X 是度量空间，$D\subseteq X$ 是一个非空子区域，x,y,z 是 D 中三个不同的点并且 $\delta_D(x)\le\delta_D(z)$，则下列条件等价：

① $j_D(x,z)=j_D(x,y)+j_D(y,z)$;

② $\frac{\delta_D(x)+|x-y|}{\delta_D(y)}\le 1$ 且 $\delta_D(x)<\delta_D(y)\le\delta_D(z)$.

证明：**(2)⇒(1)** 用反证法来证明。若 $j_D(x,z)<j_D(x,y)+j_D(y,z)$，则根据对数距离的定义，可得：

$$\frac{|x-z|}{\delta_D(x)\wedge\delta_D(z)}<\frac{|x-y|}{\delta_D(x)\wedge\delta_D(y)}+\frac{|y-z|}{\delta_D(y)\wedge\delta_D(z)}+\frac{|x-y||y-z|}{(\delta_D(x)\wedge\delta_D(y))(\delta_D(y)\wedge\delta_D(z))},\tag{1}$$

根据已知条件 $\delta_D(x)<\delta_D(y)\le\delta_D(z)$, 结合不等式（3.1），

可以推出：

$$|x-z|<|x-y|+|y-z|\left(\frac{\delta_D(x)+|x-y|}{\delta_D(y)}\right)$$

因为度量空间 X 中，显然有 $|x-z|\le|x-y|+|y-z|$，故可得：

$$\frac{\delta_D(x)+|x-y|}{\delta_D(y)}>1$$

这与已知条件矛盾。因此（1）成立。

(1)⇒(2) 已知 $j_D(x,z)=j_D(x,y)+j_D(y,z)$，则根据对数距离的定义可得：

$$\frac{|x-z|}{\delta_D(x)\wedge\delta_D(z)}=\frac{|x-y|}{\delta_D(x)\wedge\delta_D(y)}+\frac{|y-z|}{\delta_D(y)\wedge\delta_D(z)}+\frac{|x-y||y-z|}{(\delta_D(x)\wedge\delta_D(y))(\delta_D(y)\wedge\delta_D(z))} \quad (2)$$

根据已知条件，假设 $\delta_D(x)<\delta_D(y)$. 否则，如果 $\delta_D(y)\le\delta_D(x)$，则结合三角不等式 $|x-z|\le|x-y|+|y-z|$，可得：

$$|x-z|<|x-y|\frac{\delta_D(x)}{\delta_D(y)}+|y-z|\frac{\delta_D(x)}{\delta_D(y)}+\frac{|x-y||y-z|}{\delta_D(y)}\frac{\delta_D(x)}{\delta_D(y)}$$

进而推出：

$$\frac{|x-z|}{\delta_D(x)}<\frac{|x-y|}{\delta_D(y)}+\frac{|y-z|}{\delta_D(y)}+\frac{|x-y||y-z|}{(\delta_D(y))^2}.$$

因此，再根据对数距离的定义可以得到 $j_D(x,z)<j_D(x,y)+j_D(y,z)$，与已知矛盾。

接下来我们假设 $\delta_D(x)<\delta_D(y)$. 此时再根据式（2）和不等式 $\delta_D(x)<\delta_D(z)$，有：

$$|x-z|=|x-y|+|y-z|\left(\frac{\delta_D(x)+|x-y|}{\delta_D(y)\wedge\delta_D(z)}\right)$$

因此，再结合三角不等式的性质可得：

$$\frac{\delta_D(x)+|x-y|}{\delta_D(y)\wedge\delta_D(z)}\le 1 \quad (3)$$

如果 $\delta_D(x)=\delta_D(z)$，显然有：

$$\frac{\delta_D(x)+|x-y|}{\delta_D(z)}>1$$

这与不等式（3.3）矛盾。

因此，结合上述证明，可得到 $\delta_D(x)<\delta_D(z)$ 和 $\delta_D(x)<\delta_D(y)$.

接下来我们需要进一步证明 $\delta_D(y)\le\delta_D(z)$.

假设 $\delta_D(y)>\delta_D(z)$，则有 $\delta_D(x)+|x-y|\ge\delta_D(y)>\delta_D(z)$. 进而可以得到：

$$\frac{\delta_D(x)+|x-y|}{\delta_D(z)}>1$$

这也与不等式（3.3）矛盾，故有 $\delta_D(y)\le\delta_D(z)$. 因此，定理 3.1 得证。

定理 3.2 假设 X 是度量空间，$D\subseteq X$ 是一个非空子区域，存在常数 $M>0$ 且 $y\in\partial B_k(x,M)$. 对于任意的 $z\in J_k[x,y]$，有：

$$B\left(z,\frac{|z-y|}{1+u}\right)\subseteq B_k(x,M)$$

其中 $u=|z-y|/\delta_D(z)$.

证明：因为 $z\in J_k[x,y]$，可得：

$$M=k_D(x,y)=k_D(x,z)+k_D(z,y)$$

根据三角不等式，对于任意 $\omega\in B_k(z,k_D(z,y))$，显然有：$k_D(x,\omega)\le k_D(x,z)+k_D(z,\omega)\le k_D(x,z)+k_D(z,y)<M$.

进而推出：

$$B_k(z,k_D(z,y))\subseteq B_k(x,M) \quad (4)$$

根据引理 2.2，得到：

$$B\left(z,\left(1-e^{-k_D(z,y)}\right)\delta_D(z)\right)\subseteq B_k(z,k_D(z,y)),$$

结合（3.4），有：

$$B\left(z,\left(1-e^{-k_D(z,y)}\right)\delta_D(z)\right)\subseteq B_k(x,M). \quad (5)$$

再次应用引理 2.2，推出：

$$\left(1-e^{-k_D(z,y)}\right)\delta_D(z)\ge\left(1-\frac{\delta_D(z)}{\delta_D(z)+|z-y|}\right)\delta_D(z)=\frac{|z-y|}{1+(|z-y|/\delta_D(z))} \quad (6)$$

因此，根据式（5）和式（6），进一步有：

$$B\left(z,\frac{|z-y|}{1+u}\right)\subseteq B\left(z,\left(1-e^{-k_D(z,y)}\right)\delta_D(z)\right)\subseteq B_k(x,M)$$

其中 $u=|z-y|/\delta_D(z)$. 定理 3.2 得证。

参考文献

[1] Gehring, F.W. Palka, B. P. Quasiconformally homogeneous domains [J]. Journal d’analyse Mathematique, 1976, 30, 172-199.

[2] Gehring, F. W. and Osgood, B. G. Uniform domains and the quasi-hyperbolic metric[J]. Journal d’analyse Mathematique, 1979, 36, 50-74.

[3] Väisälä, J. Free quasiconformality in Banach spaces I[J]. Annales Fennici Mathematici, 1990, 15, 355-379.

[4] Väisälä, J. Free quasiconformality in Banach spaces II[J]. Annales Fennici Mathematici, 1991, 16, 255-310.

[5] Väisälä, J. Free quasiconformality in Banach spaces III[J]. Annales Fennici Mathematici, 1992, 17, 393-408.

[6] Klén, R., Vuorinen, M. Zhang, X. Quasihyperbolic metric and Möbius transformations[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 142, 2014, 311-22.

[7] Huang, X. J. and Liu, J. S. Quasihyperbolic metric and quasisymmetric mappings in metric spaces[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2015,367(9):6225-6246.

[8] Huang, X., Liu, H. and Liu, J. Local properties of quasihyperbolic mappings in metric spaces[J]. Annales Fennici Mathematici, 2016,41(1):23-40.

[9] 刘红军.度量空间中拟对称映射与拟双曲一致域的研究[J].数学学报(中文版),2020,63(5):537-544.