

# Research on continuous and discontinuous teaching of higher mathematical functions

Yinchun Sun Mei Ge Ying Lu

School of Mechatronics and Information Engineering, Chongqing University of Humanities and Technology, Chongqing, 401524, China

## Abstract

The continuity of function is a very important concept in higher mathematics, which is of great significance for students to understand the properties of functions and the subsequent study of calculus. However, for the teaching of function continuity and discontinuity, the traditional methods often pay too much attention to theoretical deduction, and neglect the intuitive understanding and practical application of function continuity and discontinuity. Under the ideological and political background of the course, this paper extracts a simple mathematical model through the continuous growth process of plants, introduces the concept of increment combined with intuitive images, deduces three equivalent definitions of function continuity through the incremental concept, and uses images to analyze continuity and discontinuity, making it easier for students to understand and master the continuous related concepts of function.

## Keywords

Function; Continuity; Discontinuity; Mathematical model

## 高等数学函数连续与间断的教学研究

孙银春 葛梅 卢英

重庆人文科技学院机电与信息工程学院, 中国·重庆 401524

## 摘要

函数的连续性是高等数学中非常重要的概念, 它对于学生理解函数的性质和后续微积分的学习具有非常重要的意义。然而对于函数连续与间断的教学, 传统方法往往过于注重理论推导, 忽视了函数连续与间断的直观理解和实际应用。本文在课程思政背景下, 通过植物的连续生长过程提炼出简单数学模型, 结合直观图像引出增量的概念, 通过增量概念推导出函数连续的三个等价定义, 利用图像对比分析连续与间断, 使学生更容易理解和掌握函数的连续相关概念。

## 关键词

函数; 连续; 间断; 数学模型

## 1 引言

函数的连续与间断是高等数学中非常重要的概念, 它对于学生理解函数的性质和后续微积分的学习具有重要意义。然而, 传统的教学方法往往过于注重理论推导, 忽视了函数连续性的直观理解和与实际的紧密联系<sup>[1-3]</sup>。连续的含义从直观来看就是连着能够不断的, 例如: 温度的变化是连续的, 再比如植物的生长, 知识的累积, 都是一个连续不断的过程。为了提高学生对于函数连续与间断的学习兴趣和效果, 本文通过数学模型和图像对比分析, 增强学生直观感知,

帮助学生更好地理解和掌握函数连续与间断的概念。

## 2 传统教学方法的问题

过于注重理论推导: 传统的教学方法往往过于注重函数连续的理论推导, 忽视了连续性的直观理解和实际应用。这使得学生在学习过程中难以形成直观的认识和感知, 导致对函数连续性的概念理解不够深入。

缺乏图像化工具的应用: 图像可以让学生直观感知, 帮助其更好地理解函数连续性的概念。然而, 传统的教学方法往往忽视了数形结合法, 导致学生在学习过程中难以形成直观的认识。

## 3 教学改革与实践

### 3.1 引入图像化工具

为了帮助学生更好地理解函数连续性, 我们引入了图像化工具。通过植物的连续生长过程提出简单函数模型, 并

【基金项目】重庆人文科技学院教改项目“《高等数学I》课程改革实践研究”(项目编号: 23CRKXJG21)。

【作者简介】孙银春(1991-), 女, 中国重庆人, 硕士, 讲师, 从事数学教育研究。

绘制函数图像，引入增量的概念，学生可以直观地观察到连续性对函数图像的影响，从而更好地理解函数连续性的概念。其次挖掘知识与知识之间的内在联系，函数连续与间断内在联系紧密，但又有区别，可以通过函数图像比较学习，将此部分数学知识系统化，整体化。

### 3.2 教学设计与组织实施

#### 3.2.1 知识引入

多媒体播放“揠苗助长”的故事，提问，寓言故事中的禾苗为什么枯萎了，因为违背了植物“连续”的生长过程。多媒体给出植物的连续生长过程动态图，从中提取出一个简单的数学模型，即植物的生长高度（y）随着天数（x）的增加而增加，从而引出函数增量的概念。

#### 3.2.2 讲授新课

函数的增量：设函数  $f(x)$  在  $U_\delta(x_0)$  内有定义， $\forall x \in U_\delta(x_0), \Delta x = x - x_0$  称为自变量在点  $x_0$  的增量， $\Delta y = f(x) - f(x_0)$  称为函数  $f(x)$  相应于  $\Delta x$  的增量。

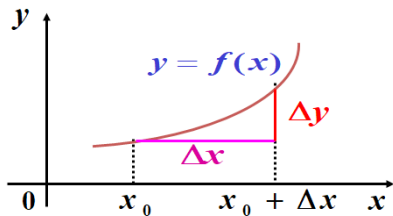


图 1 函数增量图

连续函数的定义：

定义 1：设函数  $f(x)$  在  $U_\delta(x_0)$  内有定义，如果当自变量的增量  $\Delta x$  趋向于零时，对应的函数的增量  $\Delta y$  也趋向于零，即：

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \text{ 或写成 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

那么就称函数  $f(x)$  在点  $x_0$  连续， $x_0$  称为  $f(x)$  的连续点。

在此定义的基础上令  $x = x_0 + \Delta x$ ，则  $f(x) = f(x_0 + \Delta x)$ ，因此极限式变形为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

由此得到函数连续的第 2 定义如下：

定义 2：设函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某领域内有定义，如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ，则称函数  $f(x)$  在点  $x_0$  连续。

可见，函数  $f(x)$  在点  $x_0$  连续必须具备下列条件：

- ① 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  有定义，即  $f(x_0)$  存在；
- ② 极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在；
- ③  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

定义 3<sup>[4]</sup>“ $\varepsilon$ - $\delta$ ”定义： $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，当  $|x - x_0| < \delta$  时，恒有  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 。

小组讨论：下列哪些函数图是连续的？

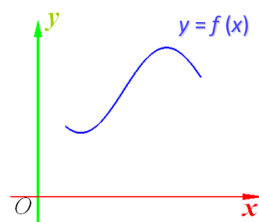


图 2

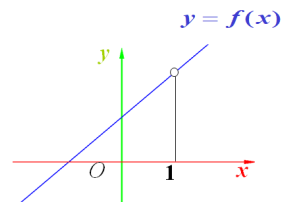


图 3

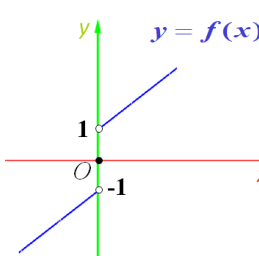


图 4

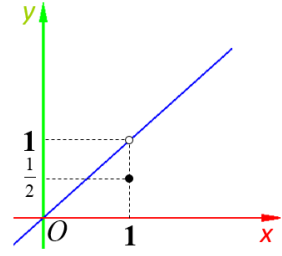


图 5

（图 2 是连续的，图 3 是  $x_0=1$  处无定义，图 4 是  $x_0=0$  处无极限，图 5 是  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ ，利用图形差异直观，讨论对比的形式，积极调动学生的思维，使学生在探究、讨论中逐步明确具体问题，充分认识当前内容，提高对当前内容函数连续性的三个条件的理解。）

#### 3.2.3 巩固练习

例 1. 试证函数  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$  在  $x=0$  处连续。（利用练习巩固函数连续性的判断方法）

用练习巩固函数连续性的判断方法）

函数的间断点

破坏函数连续性的三个条件就得到间断点：

定义：设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某去心邻域内有定义，在此前提下，如果函数  $f(x)$  有以下列三种情况之一：

- ① 在  $x=x_0$  没有定义；
- ② 在  $x=x_0$  有定义，但  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在；
- ③ 在  $x=x_0$  有定义，且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在，但  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$  则函数  $f(x)$  在点  $x_0$  为不连续，而点  $x_0$  称为函数  $f(x)$  的不连续点或间断点。

根据三种情况的不同间断点的分类如下：

{	第一类间断点	{	左右极限相等（可去间断点）
	(左右极限都存在)		左右极限不相等（跳跃间断点）
	第二类间断点		(左右极限至少有一个不存在)

例 3. 正切函数  $y = \tan x$  在  $x = \frac{\pi}{2}$  为什么间断点？（无穷间断点）。

例 4. 函数  $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  在点  $x = 1$  为什么间断点？（可去间断点）。

例 5. 函数

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$$

在  $x=0$  处为什么类型间断点? (跳跃间断点)。

### 3.2.4 知识小结

教师引导学生回忆本节课所学知识并归纳总结:

- ①函数的增量;
- ②函数在点  $x_0$  连续的等价定义;
- ③函数在点  $x_0$  的间断点。

### 3.3 教学效果分析

以重庆人文科技学院建筑与设计学院 2024 级园林 1 班作为教学班, 本班总人数 39 人, 其中部分同学高中是文科, 数学基础知识比较薄弱。教学结束后, 对本班进行问卷调查。

问题 1 植物的生长过程中, 假设  $x$  为植物的生长天数,  $y$  为植物的生长高度, 是否有助于大家对函数增量的理解? (其中 A 是 B 否)

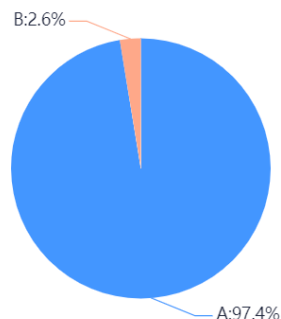


图 6 问题 1

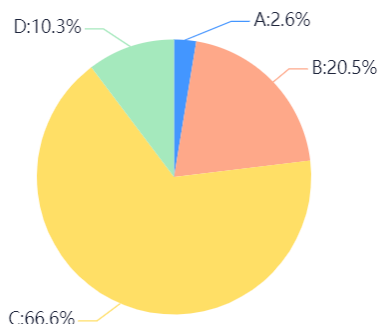


图 7 问题 3

通过图 6 发现, 在植物的生长过程中, 假设  $x$  为植物的生长天数,  $y$  为植物的生长高度, 植物的生长高度会随着天数的增加而增加, 对于问题 1 有 97.4% 的同学认为这种生活中的实物概念有助于大家对函数增量概念的理解。

问题 2 小组讨论利用不同的函数连续和间断对应的图形展示, 是否有利于大家对函数连续关于有定义, 有极限, 极限值等于函数值三个条件的理解, 进而更好地理解函数连

续的概念? (其中 A 是 B 否)。问题 2 结果与问题 1 完全相同, 97.4% 的同学认为小组讨论用不同的函数连续和间断对应的图形展示, 有利于对函数连续关于有定义, 有极限, 极限值等于函数值三个条件的理解, 进而更好地理解函数连续的定义。

问题 3 对函数连续与间断所学内容掌握如何? (A 较差 B 一般 C 较好 D 很好)

通过图 7 发现, 66.6% 的同学认为函数连续与间断所学内容掌握较好, 10.3% 的同学认为函数连续与间断所学内容掌握很好。通过对函数连续与间断的介绍, 同学们感受到了数学理论知识与实际联系紧密, 通过连续和间断的对比学习, 同学们感受到了数学知识的对立与统一。综合分析, 发现学生的学习效果明显提高。学生能够更好地理解函数连续与间断相关的概念, 并能够将其应用于实际问题中。

## 4 结论

首先, 结合大家熟知的寓言故事“揠苗助长”创设问题情境, 提升学生的学习兴趣。由植物的连续生长过程动态图中提取出一个简单的数学模型, 即植物的生长高度 ( $y$ ) 随着天数 ( $x$ ) 的增加而增加, 从而引出函数增量的概念, 过渡自然, 并将实际生活与数学紧密联系起来, 体现了数学来源于生活并应用于生活。

其次, 课中小组讨论, 提问等方式加强师生互动, 坚持学生为主体, 教师为主导。小组讨论利用图形差异, 对比直观, 积极调动学生的思维, 使学生在探究、讨论中逐步明确具体问题, 充分认识当前内容, 提高对当前内容函数连续三个条件的理解。

整个教学过程中, 函数连续与间断是一组对立统一的概念, 体现一种科学精神, 知识的累积是连续不断的过程, 需要长期坚持, 永不放弃。更提醒作为教师的我们, 要尊重学生的发展规律, 循序渐进, 不急于求成。

教学实践证明, 这种数与形的结合, 将数学理论知识与实际联系起来能够提高学生的学习兴趣和学习效果, 培养学生的实际应用能力。希望这种方法能够得到更广泛的应用, 为高等数学教学带来更多的改革与创新。

## 参考文献

- [1] 鲍丽娟. “函数连续性与间断点”的对分课堂教学设计与实践 [J]. 高等数学研究, 2019, 22(5):4.
- [2] 王雁, 拜钰悦. 基于 OBE 理念的轻混合教学模式设计研究一以函数的连续与间断为例 [J]. 赢未来, 2021(9):115-116.
- [3] 刘倩, 郭从洲, 张启慧. 一些函数的连续点与间断点 [J]. 高等数学研究, 2022(005):025.
- [4] 李亚亚, 王昌. 函数连续性概念的历史: 从欧拉到勒贝格 [J]. 自然辩证法通讯, 2024, 46(2):61-67.