

The teaching of mathematics unit chapter beginning course based on HPM perspective -- taking the teaching of binary one-time Equations as an example

Xiang Li

Zhenjiang City Dantu District Zhixianzong School, Zhenjiang, Jiangsu, 212121, China

Abstract

In the history of mathematics, human's understanding and development of the equation is the cognitive basis for students. The history of mathematics can make students realize the necessity of learning binary first order equations. Return to the true nature of education, to promote the development of students as the starting point and goal. HPM perspective of mathematics unit chapter beginning lesson teaching, let students experience and understand the development of equations in the history of mathematics. With a low starting point and a low load, we can cultivate students' awareness of mathematical symbols, and select and deeply study mathematical learning methods. The unit chapter beginning course teaching extends the HPM perspective from the ancients' understanding of "equation" to guide students to gain mathematical learning experience in large unit learning.

Keywords

HPM; Unit chapter beginning lesson; History of mathematics

基于 HPM 视角的数学单元章始课教学——以“二元一次方程组”教学为例

李祥

镇江市丹徒区支显宗学校, 中国·江苏 镇江 212121

摘要

数学历史上人类对等式的认识和发展, 是学生已有的认知基础, 数学史可让学生体会学习二元一次方程的必要性。回归教育本真, 以促进学生学习为出发点和落脚点。HPM视角的数学单元章始课教学, 让学生体会和感悟数学史上方程的发展。以低起点、低载量深入数学学习, 培养学生的数学符号意识, 精选并深入研究数学学习方法。以古人对“方程”的理解延伸出HPM视角的单元章始课教学, 引导学生在单元学习中获得数学学习经验。

关键词

HPM; 单元章始课; 数学史

1 引言

方程是描述现实世界中等量关系的一种数学模型, 方程的学习可以培养学生的符号意识。关于“方程”一词的溯源, 既有我国古代数学著作《九章算术》中有“方程”章, 还有清代数学家李善兰对现代人使用“方程”一词所做的贡献。古人通过观察和经验获得有关方程关系的知识, 逐渐产生等量关系的过程。基于 HPM 视角的数学单元章始课教学, 有利于学生提升学习兴趣, 增强数学学习的好奇心、想象力和探求欲。

学生对数学概念的理解过程与数学概念的历史发展过程具有一定的相似性。本课例深入探究数学单元章始课学习

的研究课程, 对数学实践活动进行研究, 数学学习的范式变“先学后做”为“边做边学”、变“被动学习”为“主动学习”, 通过数学单元起始课学习的实践, 以及数学单元课的课堂研究, 教师创造学习条件, 成为学习的启动者、学习欲望的授递者、创设条件的导演。根据数学实践保障课堂实践研究, 既关注到学生的学习效率, 又考虑到学生对实践的课程研发。

2 从一到二, 返二归一

实践表明, 数学史有助于更好地实现数学教学的三维目标, 因此, 如何将数学史融入数学教学, 已经成为中学数学教师日益关注的课题。^[1] 古代数学文献中有着十分丰富的二元一次方程组问题, 古代方程的情境较为简易, 如表1所示。

古代数学史已注重数学情境对学生思维的培养。二元

【作者简介】李祥(1984-), 男, 中国江苏镇江人, 本科, 中学高级教师, 从事数学与应用数学研究。

表 1 历史上的二元一次方程组问题

类别	方程组	问题举例	出处
1	$\begin{cases} x + y = c_1 \\ ax \pm by = c_2 \end{cases}$	为了鼓励儿子学好算术，儿子每做对一道题，父亲给他 8 分钱；做错一道题，罚 5 分钱。做完 26 题后，谁也不用给谁钱。问：儿子做对几道题	克拉维斯《代数》（1608）
2	$\begin{cases} a_1x = y + b_1 \\ a_2x = y - b_2 \end{cases}$	今有共买物，人出八，盈三；人出七，不足四。问：人数，物价几何？	《九章算术》（1 世纪）
3	$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x \pm b_2y = c_2 \end{cases}$	9 个李子、7 个苹果共值 107；7 个李子 9 个苹果共值 110。问：一个李子和一个苹果各值多少	摩诃毗罗《文集》（9 世纪）
4	$\begin{cases} x + a_1 = b_1(y - a_1) \\ y + a_2 = b_2(x - a_2) \end{cases}$	甲对乙说：“你给我 10 迈纳，那么我的钱将是你的 3 倍。”乙对甲说：“如果我从我那儿拿同样多的钱，那么我的钱将是你的 5 倍。”问甲、乙各有多少钱？	《希腊选集》（5 世纪）

一次方程单元章始课教学从“一元”到“二元”，建立新的数学模型，从“二元”到“一元”，用转化思想解决问题。^[2]从“趣”的激发，注重情境带入，与古代数学史方程的发展过程类似，让学生在古代与现代单元教学中往返穿梭，不知不觉地实现从“趣”的激发到“慧”的调动。

教育的本质是促进人的发展，其关键在于引导。本课例从数学单元起始课课堂进行数学建模，从数学驱动问题的发展过程认识学生数学实践知识的自然发生过程，从学生认知基础出发，创造学生的学习动机，提升学生的综合素养。

3 教学过程

3.1 一认，二元一次方程的定义

李邦河院士说：“数学根本是玩概念的，技巧不足道也。”数学概念反映了数学的本质属性，也是构建数学大厦的基石。教师以扑克牌作为情境引入新课，学生参与游戏，课堂师生参与英文字母卡片游戏（共 52 张）。

活动 1：教师从所有扑克牌中，取 12 张卡片，分发给甲同学和乙同学；

在活动过程中，可以用一个未知数表示如果设乙同学的卡片是 x 张，则甲同学的卡片是 $(12-x)$ 张，活动过程中的数量关系，你能用表格表示吗？

两位学生展示扑克牌的活动结果，如表 2 所示。

表 2

乙	x	6	3	1	2	4	5	7	8
甲	$12-x$	6	9	11	10	8	7	5	4

活动 2：取若干张卡片，分发给甲同学和乙同学且甲的卡片数是乙的 2 倍；若用未知数 x 表示，学生展示结果，如表 3 所示。

表 3

乙	x	1	2	3	4	5	6
甲	$2x$	2	4	6	8	10	12

设计意图：教师从实际问题出发，引导学生思考，七年级学生对游戏形式的引入充满兴趣，两个活动中的几组数据让学生充分感受一个未知数表示甲乙之间的数量关系。

活动 3：取 12 张卡片，分发给甲同学和乙同学且甲的卡片数是乙的 2 倍。

通过活动 1 和 2 的过程，学生发现：甲、乙手中卡片可以用熟悉的一个未知数表示，通过再次提问，引导学生表示出 2 个未知数，列出方程： $\begin{cases} x + y = 12 \text{ ①} \\ x = 2y \text{ ②} \end{cases}$ ，根据活动 3 的设计，学生发现活动中的 2 个未知数更容易接受。

教学说明：学生从熟悉的情境出发，通过教师追问与问题串的设计，启发学生从“一”到“二”未知数的变化，以及“一元”到“二元”方程思想的转换。

在教学中，大多数学生都可以迅速引入一个未知数，合理表示出另一个未知数，教师通过未知数的变化，直接感知方程思想的精髓。

3.2 二认，二元一次方程组的定义

苏科版七年级上册章头图“鸡兔同笼”是取自生活中的实际问题，也是我国古代数学名题，既反映了二元一次方程（组）研究的源远流长，又反映了二元一次方程（组）与显示生活的紧密联系。与“鸡兔同笼”相配的方程组则是给出了二元一次方程组的数学表达：有两个未知量和两个一次方程组成的方程组。

问题：今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问鸡兔各几何？——《孙子算经》

学生根据现有知识，用方法 1：设笼中有 x 只鸡， $(35-x)$ 只兔。列出方程： $2x+4(35-x)=94$ ，学生随即得出未知数的解。

你能用 2 个未知数和方程表示问题中的等量关系吗？学生得出方法 2：设笼中有 x 只鸡， y 只兔。列出方程：

$\begin{cases} x + y = 35 \\ 2x + 4y = 94 \end{cases}$ 。由此，教师根据活动和课本章头图引入二元一次方程组的定义。

根据列方程的依据，两个未知数的方程更简洁，更容易列出方程。此时，教师强调当未知数之间的关系较复杂时，学生可以更容易的根据等量关系获得两个正确的二元一次方程。

紧接着，教师给出二元一次方程的定义辨别题。

例 1. 下列哪些是二元一次方程？

- ① $6x+3y=4z$ ② $7xy+y=9$ ③ $2x+y+1$ ④ $2(x+y)=8-x$
⑤ $\frac{x}{3}+2y=1$

2. 下列哪些是二元一次方程组?

① $\begin{cases} 2m-n=1, \\ m+n=2. \end{cases}$ ② $\begin{cases} x-2y=3, \\ y+z=1. \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x=1, \\ x+2y=5. \end{cases}$ ④ $\begin{cases} x^2+y=5, \\ x-y=4. \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=12 \\ 3x-2y=24 \end{cases}$

教学说明: 结合问题列出的二元一次方程和二元一次方程组, 学生通过归纳后的概念熟悉并掌握相关概念。通过数学史的引入, 学生对知识概念更容易理解, 加深对数学学习的认知。

3.3 三认, 中国古代方程的定义

笔者根据古代《孙子算经》中二元一次方程的问题情境引入, 学生掌握了二元一次方程的概念。

随即, 教师展示中国古代方程的知识: (1) 宋元时期, 中国数学家创立了“天元术”, 用“天元”表示未知数进而建立方程, 《测圆海镜》一书中说到“立天元一”相当于“设未知数 x ”。所以在简称方程时, 将未知数称为“元”。(2) 《九章算术·方程》记载: “方”即方形, “程”即表达式的意思, 如有若干个相关的数据, 将这些相关的数据并肩排列成方形, 则成为“方程”。我国古代使用“方程”二字, 其含义是求未知数的一种算法规则。

教学说明: 二元一次方程的教学从浅层化、形式化到关注内涵、深入本质。通过数学史二元一次方程概念的变化让学生认识一元到二元的认知发展变化。

3.4 四认, 求未知数的方法

教师带领学生回顾课堂的卡片活动: (1) 一元一次方程 $x+2x=12$, 如何求未知数? (2) 二元一次方程 $y=2x$, 如何求未知数? (3) 二元一次方程组 $\begin{cases} y=2x \\ x+y=12 \end{cases}$, 如何求未知数?

继续回顾情境 2: 二元一次方程组 $\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases}$, 如何求未知数?

学生在教师的引导下, 板书解得: 问题(3)中的未知数可通过代入消元将 $y=2x$ 代入 $x+y=12$ 得 $x=4$, $y=8$,

即原二元一次方程组的解为 $\begin{cases} x=4 \\ y=8 \end{cases}$ 。教师追问: 情境 2 的二元一次方程组还有其他解法吗? 学生答: 将① $\times 2$ 得

$2x+2y=70$, ② - ① 得 $2x+4y-2x-2y=24, y=12$, 将 $y=12$ 代入①

得 $x=23$, 所以原方程组的解为 $\begin{cases} x=23 \\ y=12 \end{cases}$ 。根据学生展示的解

未知数的方法, 教师归纳总结得出相关结论: 代入消元法、加减消元法解得未知数。

教学说明: 章头语揭示了本章主题: 二元一次方程(组)是刻画现实世界的有效数学模型, 同时也点明了研究二元一

次方程组的主要方法: 消元。

此后, 教师展示课本章始图: 学校举行环保知识竞赛, 规则如下: 答对 1 题得 4 分, 答错 1 题扣 1 分。(1) 小亮在这次竞赛中共回答了 10 个问题, 答对 5 题, 答错 5 题, 小亮得了多少分? (2) 小明在这次竞赛中也回答了 10 个问题, 共得 25 分, 小明答对了几题? 答错了几题?

教学说明: 选择“环保知识竞赛”这样学生感兴趣的实际问题, 意在设置悬念, 激发学生的探究热情。教师应鼓励学生积极参与, 让学生经历尝试、猜想、验证的过程, 也可以让学生尝试用学过的知识去解决这个问题, 并引导学生用数学语言表达自己的想法。学生解决问题的方法可能有: 简单计算、枚举、利用一元一次方程求解等, 最后可以引导学生用两个未知量来表达题意, 再用前面计算所得的结果进行验证, 点出本章主题和内容。

4 教学反思

4.1 单元教学联认知, 关联建构成体系

HPM 研究表明, 数学史对学生的数学学习和教师的专业发展都有着重要的促进作用。单元教学从整体把握二元一次方程组的概念, HPM 视角下的数学单元教学和人文之间架起一座桥梁, 能够在德育上发挥独特的优势。^[1]

数学课程缺少实践和数学教学忽略实践体验, 数学课程对数学文化的渗透较少。本课例构建基于数学文化的实践特色的数学基础性课程课例, 满足学生个性化学习兴趣和拓展性课程, 关注学生未来发展的探究性课程体系。

4.2 认知觉醒探变化, 强化概念提素养

布鲁纳说: “学习就是认知结构的组织和重新组织, 学习结构就是学习事物是如何联系的。”本节由潜入深, 从二元一次方程的概念入手, 以趣味学习的方式引入教学问题, 按照“四步认识”的步骤提高认知水平, 从 HPM 视角的二元一次方程的概念到解二元一次方程, 层层递进, 学生的数学素养得到有效提高。

通过开展单元起始课的教学范式, 本课例构建“数学教学实践”活动环节, 让教师从追求分数的短期目标转变到满足学生成长和发展需要的长远目标; 从追求“了解、理解、掌握、运用”的结果性目标, 转变为不仅追求结果还要讲究“经历、体验、探索”的过程性目标。两项目标相辅相成, 学生通过实践经验加深对数学学科的深度理解, 学生综合素养自然提升。

参考文献

- [1] 卜以楼. 生长数学: 卜以楼初中数学教学主张[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2017.
- [2] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 425-427.
- [3] 涂荣豹. 数学教学设计原理的构建——教学生学会思考[M]. 北京: 科学出版社, 2018.