

New Explorations in Mathematics Textbooks: Focusing on and Analyzing Non-Textual Elements from an Innovative Perspective

Yin Hui Yunfei Lu

School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang, Guizhou, 550025, China

Abstract

With the increasing emphasis on mathematical representation in mathematics education reform, the role of non-textual elements in textbooks has become more prominent. However, existing research lacks systematic studies on non-textual elements in mathematics textbooks. This study examines sections from the seventh-grade 下册 (second semester) mathematics textbook published by the People's Education Press, analyzing non-textual elements across four dimensions: contextualization, accuracy, diversity, and relevance, thereby constructing a research framework for non-textual elements. The findings indicate that non-textual elements in the textbook perform well in terms of accuracy and relevance but are insufficient in applying real-world contexts within the dimension of contextualization, with room for improvement in diversity. The study also suggests that future research should incorporate the dimension of "conciseness," refine quantitative scoring systems, and expand the scope of study subjects to enhance the research framework and advance mathematics education research.

Keywords

non-textual elements; contextualization; accuracy; diversity; relevance

数学教材新探：创新视域下非文本元素的聚焦与剖析

惠尹 陆云飞

贵州师范大学数学科学学院，中国·贵州 贵阳 550025

摘要

随着数学教育改革对数学表征重视程度的提升，教材中非文本元素的作用日益凸显。然而，已有研究对数学教材中非文本元素的系统研究较少。本研究以人教版七年级下册数学教材相关章节为对象，从情境性、准确性、多样性和关联性四个维度进行分析，构建了非文本元素研究框架。研究发现，教材非文本元素在准确性和关联性方面表现较好，但在情境性中的现实情境上运用不足，多样性有待提高。研究还指出，未来需考虑“简洁性”维度、细化量化评分体系、拓展研究对象，以完善研究框架，推动数学教育研究发展。

关键词

非文本元素；情境性；准确性；多样性；关联性

1 问题的提出

近年来，世界上许多发达国家的数学教育改革越来越关注数学表征的重要性，将数学表征视为“用于交流信息与促进理解的有效工具”，比如美国全国数学教师委员会（NCTM）在国家标准文件中明确建议各个年级的学生“创建与利用表征来组织、记录与交流数学思想；选择、应用和在数学表征之间转换以解决问题；使用表征来为物理、社会与数学现象建模并进行解释”^[1]。尽管中国课程标准文件中未直接出现“数学表征”这一特定表述，但是在诸多方面均渗透着与之相关的要求。《义务教育数学课程标准（2022

年版）》（以下简称《22课标》）在核心素养构成部分提出：会用数学的眼光观察现实世界，会用数学思维思考现实世界以及会用数学的语言表达现实世界。在教材编写建议部分提出：“教材应具备可读性，图文并茂，关注学生身边发生的事情，增加学习的趣味性，激发学生内在学习动机，促进学生主动学习”^[2]。

相应地，现在使用的教材中出现了更多的图片、照片与表格。Woodward认为视觉表征可以通过吸引学生的注意力进而产生积极的教育效果^[3]。有学者通过对科学教材以及阅读教材进行研究，总结出视觉图像的五个功能：装饰性、代表性、组织性、解释性与转换性。但是数学中的视觉表征不仅仅是信息的提供者，同时也是学生进行数学思考的工具，数学表征既是“过程”又是“产品”，是以某种形式捕

【作者简介】惠尹（2001-），女，中国云南宣威人，硕士，从事数学教育研究。

捉数学概念或关系的行为以及形式本身^[1]。作为“产品”，表征是数学思想的呈现，而作为“过程”，表征是数学思想的本身。数学表征在数学概念理解和问题解决过程中发挥着关键作用。不同表征形式各具优势与局限，而多元表征的灵活运用能够多角度呈现数学概念与问题的本质特征。无论是简单还是复杂的表征形式，它们都是教师阐释数学概念、演示解题过程以及构建概念间联系的重要工具^[4]。但是，以往的研究针对数学教科书中的非文本元素的研究较少，这些研究中的大多数只关注了数学图表与图形，而同样属于非文本元素的照片与图画元素被视为非文本元素的边缘，几乎没有得到系统的研究^[5]。

关于数学教材中非文本元素的研究始于2010年Rae Young Kim的开创性工作。该研究首次系统性地考察了非文本元素的类型、情境特征及其与文本元素的关联性，通过对比分析5本美国教材和13本韩国教材发现：尽管数学教材中的非文本元素不受语言差异影响，但它们呈现出不同的设计侧重点，折射出两国对“数学学习重点”以及“特定社会文化背景下数学教与学方式”的不同认知；虽然两国教材在非文本元素的使用模式上存在相似性，但它们为学生提供的数学学习机会却存在显著差异^[6]。2012年，Kim对原有研究框架进行了改进，将原本的两个维度扩展为四个：准确性、间接性、情境性与关联性，并构建了相应的评分等级量表，对韩美两国教材中的非文本元素进行了量化探索性研究。该研究不仅揭示了不同文化背景下数学教材中非文本元素的使用模式，还为评估数学教材中非文本元素的质量提供了理论依据。研究表明，不同主题和教材之间的非文本元素存在显著差异，这意味着学生通过非文本元素获取学习机会的程度也有所不同。此外，该研究在数学教育领域推动了非文本元素的概念化发展，同时对教材分析和课程开发具有重要的启示意义^[5]。

目前，国内数学教育研究尚未对教材中的非文本元素（如图表、符号、版式等）进行系统化探究，而这类元素对学生的数学学习体验和认知建构具有重要影响。为填补这一研究空白，本研究以Kim的非文本元素分析框架为基础，结合中国数学教材的特点，构建本土化的研究框架。该框架不仅能为非文本元素的教学价值研究提供理论支撑，还能指导教材优化设计，从而提升数学教育质量，推动数学教育研究的全面发展。

2 研究设计

《22课标》在“教材编写建议”部分指出：教材素材的选取应尽可能地贴近学生的现实，以利于学生经历从现实情境中抽象出数学知识与方法的过程，发展抽象能力、推理能力等；源于学生现实的各种学习素材应当真实可信。例如，设计的问题情境客观存在，提供的数据可信且具有实际含义，需要研究或解决的问题确实存在；教材应为学生提供丰

富的问题情境、充分的思考空间，让学生经历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等数学活动过程，帮助学生感悟基本思想，积累基本活动经验。教材应具备可读性，图文并茂，关注学生身边发生的事情，增加学习的趣味性，激发学生内在学习动机，促进学生主动学习。基于以上要求，本研究将数学教材中的非文本元素研究划分为四个维度：情境性、准确性、多样性、关联性^[2]。

2.1 核心概念界定

2.1.1 非文本元素概念

非文本元素是一种视觉呈现，是指教材中除了文字叙述之外的其他组成部分。非文本元素包含了照片、图片、数学图表与数学图形。照片强调通过摄影手段拍摄出来的真实照片，强调真实性与纪实性；图片则更加侧重于通过手绘、插画以及图形设计等方式创作出来的图画；数学图表通常是指用点、线、面等图形来表示两个变量之间关系的图表，比如折线图、柱状图等，而数学图形则是指有特定定义与性质的几何图形，例如三角形、圆形等，如图1所示，其中(1)属于照片，(2)属于数学图表，(3)属于图片，(4)属于数学图形^[6]。

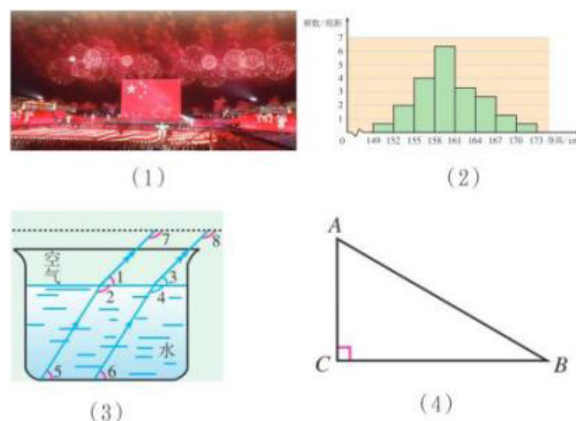


图1

2.1.2 情境性

情境性是指在现实的情境当中呈现数学思想。Lesh等人认为学生在数学情境中建模的过程可以促进知识的理解，并且能够在相同或相似的情境中再次运用该知识^[7]。Wiggins认为知识的分割与去情境化对教学有害，因为能力的形成既需要情境也需要推理^[8]。情境性的非文本元素可以提供知识的背景并促进学生建模的过程，提供了在情境中思考数学并加深理解的机会，因此可以通过数学与现实生活之间的联系影响学生的理解与学习。所以检验数学教材中提供了什么样的情境以及如何不同情境中呈现数学思想与概念是十分重要的。

2.1.3 准确性

准确性是指教材中非文本元素的清晰性与严谨性，非文本元素的使用不应导致学生对于知识内容的误解。如果非

文本元素提供了模糊或错误信息,那么学生在理解知识内容与解决相关问题时会产生更多的疑问与困难。所以应当衡量非文本元素如何以清晰、正确的方式表达概念与想法^[5]。

2.1.4 多样性

多样性是指解释特定概念或问题的非文本元素在种类上的多样性。Dienes 提出了多重体现原则,该原则指出:通过改变同构结构出现的背景、情境和框架,可以为学习者提供不同的学习机会,借此可以抽象出数学概念与问题之间的相似之处^[9]。Presmeg 在研究中提到:非文本元素的“单例具体性”可能会导致数学理解的困难,因为一些典型的表征可能是学生错误概念的根源^[10]。此外,因为每种表征都有其特定的优势与劣势,因此通过有机结合多种不同的表征可以展示数学概念或问题的不同方面,使得每一种表征都更加有效。因此,非文本元素的多样性可以适应不同学生的不同学习风格,并促进教育的公平。

2.1.5 关联性

关联性是指非文本元素与其对应的文本元素的连接程度。Braden 将其描述为“视觉-语言合作”与“视觉-语言分离”,合作是指视觉图像与文本内容两者良好连接并相互支持,而分离是指视觉图像与文本内容之间的割裂状态。视

觉表征在数学学习中具有双重功能:一方面,它能以直观模型的形式呈现文本和符号难以表达的信息;另一方面,它可作为有效的问题解决工具。由于学生的阅读素养和视觉素养存在个体差异,视觉表征尤其能为阅读能力较弱的学生提供关键的信息获取途径^[11],Winn 的研究表明图形表征对于数学潜力生的成绩提升比对其余学生的影响更大。大量研究表明与文本相关的图片有助于学生的学习,而装饰性的图片则对学生学习没有影响^[12]。

2.2 研究对象

本研究以人教版七年级下册数学教材为研究对象,重点选取第五章“相交线与平行线”(图形与几何)、第八章“二元一次方程组”(数与代数)以及第十一章“数据的收集、整理与描述”(概率与统计)三个章节。这三个章节分别对应《22课标》的三大核心领域,通过对其中非文本元素的系统分析,旨在构建教材非文本元素研究的初步框架,为充分发挥非文本元素的教育价值提供理论与实践依据。

2.3 研究框架

为了更好地研究教材中非文本元素的表现情况,针对不同的维度的不同水平进行了赋分,见表1。

表1:非文本元素研究框架

维度	定义	分值
情境性	作为非文本元素的现实情境或对象中包含数学元素,促进数学概念的理解或数学问题的解决	2
	非文本元素仅以现实情境或对象作为数学活动的背景,促进相关数学活动的进行	1
	非文本元素既不包含现实的对象也不包含现实的情境,比如数学图形或图表	0
准确性	非文本元素正确地展示或表征了一个概念与问题	2
	非文本元素在展示概念的定义或表征数学问题上有意义但是展示与表征存在一些缺失与误导	1
	非文本元素在概念展示或问题表征上存在错误或未能准确表征数学概念	0
多样性	概念的展示或问题的表征由两个及其以上的非文本元素组成,并且其中的每一个非文本元素可以表示概念或问题的不同侧面	1
	仅有一个非文本元素对概念或问题进行表征与展示	0
关联性	非文本元素与上下文中的数学内容有明确与充分的关联	1
	非文本元素与上下文中的数学内容有较弱的关联或没有联系	0

3 研究结果

3.1 情境性

根据图2和图3的数据分析,三个章节中非文本元素的情境性评分呈现显著特征。其中,不含现实情境的纯数学图形和图表(0分)占比最高,具有数学相关现实情境的元素(2分)次之,这类元素能有效辅助数学概念呈现;而仅提供数学活动背景的元素(1分)出现频率最低。更重要的是,非文本元素的数量分布与教学内容的表征需求高度吻合:当教学内容需要通过可视化方式呈现(如第五章的几何概念)时,教材配置了更丰富的非文本元素;而当内容以抽象符号运算为主(如第八章的代数式)时,非文本元素的数量则相应减少。这印证了教材中非文本元素的使用并非随意安排,而是严格遵循着“依内容特性配置”的基本原则。

3.2 准确性

图4和图5展示了各章节非文本元素在“准确性”维度的数量统计结果。数据分析表明,在研究的三个章节中,非文本元素的准确性整体表现优异。具体而言,绝大多数非文本元素获得了2分的满分评价,仅有少量元素存在准确性问题(得分1分或0分)。这一分布特征充分说明,教材在三个章节的非文本元素使用上,其准确性控制达到了较高水准。

3.3 多样性

图6、7的统计可视化呈现了在非文本元素的多样性维度上,教材中的三个章节呈现出明显的共性特征:概念表征与问题展示主要依赖单一非文本元素(如插图),而较少采用多类型元素的组合呈现方式。这种编排方式可能基于教材设计的简洁性原则或特定教学目标的考量,但同时也可能影

响学生对知识的多角度理解，使其难以通过多元表征方式构建更完整的认知结构。

3.4 关联性

图 8、9 的分析结果表明，三个研究章节中的非文本元素与上下文内容保持了较高的一致性。具体而言，这些视觉

表征元素与对应文本内容形成了紧密的认知关联，基本不存在脱离教学内容的装饰性图示。这种特征充分体现了教材编排的系统性：非文本元素不仅作为辅助说明工具，更是与文字内容构成了有机的整体，共同促进知识内容的有效传递。

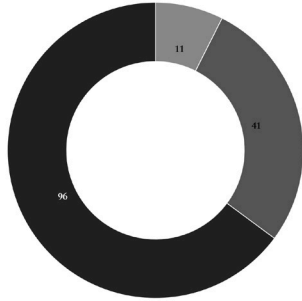


图 2

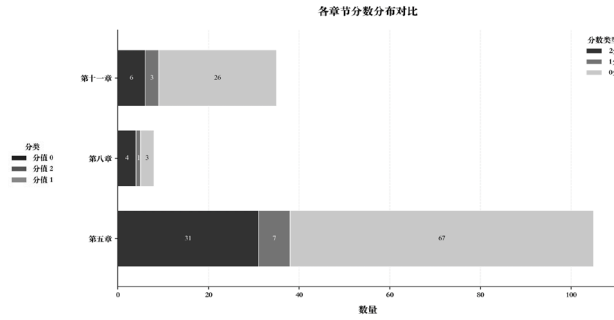


图 3

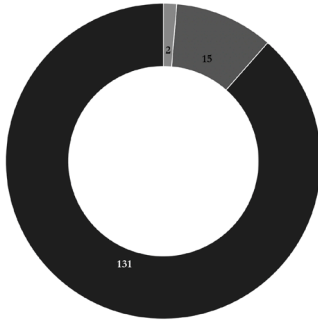


图 4

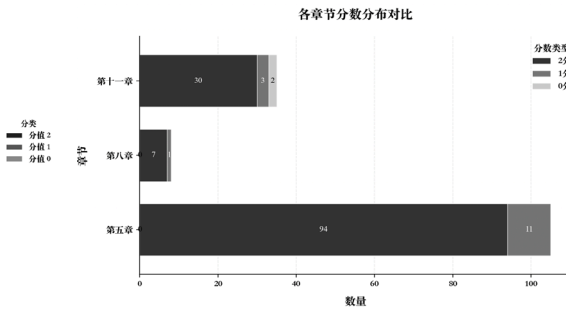


图 5

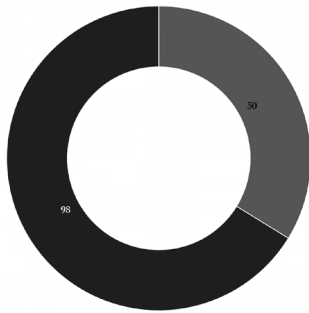


图 6

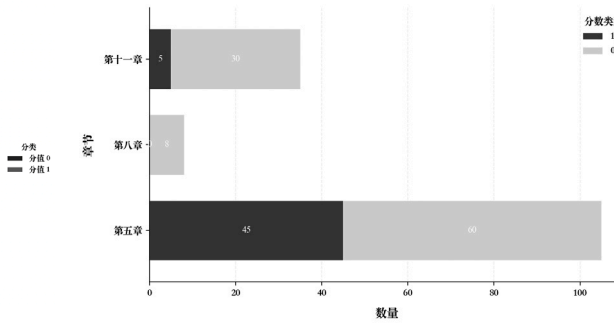


图 7

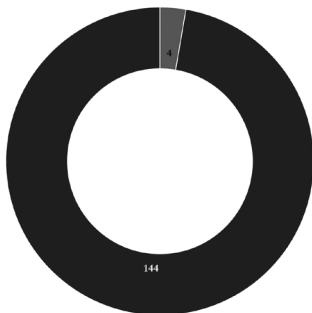


图 8

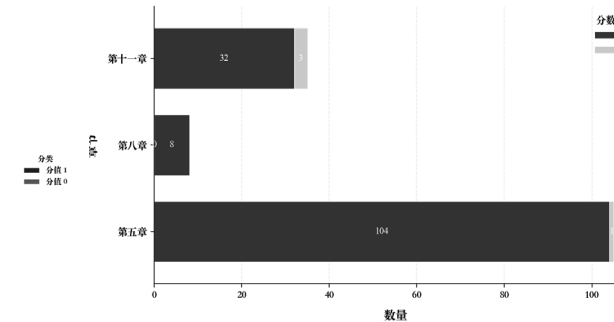


图 9

4 研究讨论

4.1 研究结论

人教版七年级下册数学教材第5、8、11章中的非文本元素在情境性上主要表现为没有现实情境的数学图形或数学表格,同时也有部分非文本元素表现为含有数学元素的现实情境,促进概念与问题的理解。在准确性方面,这3个章节中的非文本元素准确度高,能精准阐释概念与问题。就非文本元素对概念和问题的多元表征而言,其多样性欠佳,多以单个非文本元素作主要解释方式,整体仍有提升空间。最后,章节中的非文本元素与上下文中的文本内容关系紧密,共同服务于数学内容的表征。

4.2 研究局限性分析

4.2.1 非文本元素“简洁性”维度的考量

在2012年Kim的研究中,基于一线教师的实践反馈,对非文本元素的特征衡量进行了调整,将原本的“多样性”视角转向了“简洁性”维度。一线教师在实践中观察到,非文本元素的细节程度与复杂性水平对学生的视觉感知和概念理解存在影响。从认知心理学角度来看,过多的细节与过高的复杂性会使视觉内容的趣味性降低,进而分散学生的注意力,增加其认知负荷,不利于学生聚焦于关键信息的提取与整合。反过来,学生则难以从非文本元素中获取足够的信息来构建完整的认知图式,从而无法有效地理解其所承载的数学概念。当引入新的数学概念时,简洁的非文本元素能够以更为直接、明晰的方式传达核心意义与思想,有助于学生把握概念的本质,降低因复杂元素导致的模糊性所带来的理解障碍。然而,不可忽视的是,非文本元素的多样性在数学概念的多元表征与深度理解方面亦具有重要价值。因此,在未来的研究中,是否应将“简洁性”纳入研究框架,以及如何处理“简洁性”与“多样性”之间的关系,成为亟待探讨的关键问题。此外,是否存在现有研究尚未触及的其他潜在维度,同样需要进一步的实证探索与理论挖掘,以完善非文本元素的研究框架,使其更贴合数学教育的实际需求与认知规律。

4.2.2 量化评分体系的精细化需求

本研究在对非文本元素的情境性、准确性、多样性以及关联性进行量化评估时,分别采用了0-2和0-1的评分标准。这一量化体系的构建是在参考前人研究成果的基础上,结合人教版七年级下册教材的实际情况进行的初步尝试。然而,从研究的深入性与精准性角度出发,这种相对宽泛的评分划分可能无法全面、细致地反映非文本元素在各个维度上的细微差异与具体表现。为了更精确地剖析教材中非文本元素在不同维度上的特质与作用,有必要进一步探讨是否应对每个维度的评分水平进行更为详细、精准的细分,从而为数学教材的编写、教学设计以及教学评估提供更具针对性和指

导性的建议。这不仅需要对数学教育理论有深入理解,还需结合大量的实证数据进行验证与优化,是一个具有挑战性但又十分必要的研究方向。

4.2.3 研究对象的拓展与应用推广

本研究选取人教版七年级下册数学教材中与数与代数、图形与几何、概率与统计三大领域相关的内容作为研究对象,旨在初步验证非文本元素研究框架的可行性与应用价值。然而,由于不同地区、不同版本的数学教材在非文本元素的设计与运用上存在各自独特的风格与特点,将现有的研究框架应用于不同版本教材的比较分析中,有望挖掘出各版本教材在非文本元素运用上的优势与不足,从而促进教材之间的相互借鉴,为教材的优化设计提供更为丰富的参考依据。因此,未来的研究应致力于拓展研究对象的范围,加强对不同版本教材的比较研究,充分发挥研究框架的应用潜力,实现数学教育资源的优化配置与协同发展。

参考文献

- [1] National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.
- [2] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2022年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2022:2,5-11.
- [3] Woodward A. Do illustrations serve an instructional purpose in US textbooks?[M]//Learning from textbooks. Routledge, 2012: 115-134.
- [4] Stylianou D A. Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics[J]. Journal of mathematics Teacher education, 2010, 13: 325-343.
- [5] Kim R Y. The quality of non-textual elements in mathematics textbooks: an exploratory comparison between South Korea and the United States[J]. ZDM, 2012, 44: 175-187.
- [6] Kim R Y. Non-textual elements as opportunities to learn: An analysis of Korean and US mathematics textbooks[J]. School Mathematics, 2010, 12(4): 605-617.
- [7] Lesh R, English L D. Trends in the evolution of models & modeling perspectives on mathematical learning and problem solving[J]. ZDM, 2005, 37: 487-489.
- [8] Wiggins G. Assessment: Authenticity, context, and validity[J]. Phi delta kappan, 1993, 75(3): 200-213.
- [9] Sriraman B, English L D. On the teaching and learning of Dienes' principles[J]. ZDM, 2005, 37: 258-262.
- [10] Presmeg N C. Generalization using imagery in mathematics[M]//Mathematical reasoning. Routledge, 2013: 299-312.
- [11] Braden R A. Visualizing the Verbal and Verbalizing the Visual [J]. 1982.
- [12] Winn B. Charts, graphs, and diagrams in educational materials[J]. The psychology of illustration, 1987: 152-198.