 DOI: https://doi.org/10.12345/jxffcxysj.v8i15.30802

Research on engineering mathematics analysis teaching under OBE-PBL Integration Model — Taking the teaching design of constant term series as an example

Dapeng Gao Shiqiang Feng*

School of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong, Sichuan, 637009, China

Abstract

"Engineering Mathematical Analysis" is a core foundational course in engineering education, which runs through the vertical mainline of the curriculum system, the progressive stages of professional learning, the full process penetration of engineering practice, and the ability foundation of scientific research and innovation. Concept class is a core component of "Engineering Mathematical Analysis" and also a difficult point in teaching. The article is guided by the OBE-PBL fusion mode and uses positive and negative examples to analyze the teaching design of the concept of constant term series, helping students establish mathematical abstraction ability from "finite sum" to "infinite sum". In addition, the circumference and area of Koch snowflakes, an important case of fractal theory, are used to reinforce students' learning outcomes.

Keywords

Engineering Mathematics Analysis; Concept class; Constant term series; instructional design

OBE–PBL 融合模式下工科数学分析教学探究——以常数项级数概念的教学设计为例

高大鹏　冯世强 *

西华师范大学数学与信息学院，中国·四川 南充 637009

摘　要

《工科数学分析》是工科类专业教育的核心基础课程，其地位贯穿于课程体系的纵向主线、专业学习的阶段递进、工程实践的全流程渗透，以及科研创新的能力基底。概念课是《工科数学分析》的核心组成部分，也是教学中的难点。文章以OBE-PBL融合模式为指引，通过正反引例，对常数项级数概念进行教学设计分析，帮助学生建立从“有限和”到“无限和”的数学抽象能力。此外，以分形理论的重要案例科赫雪花的周长和面积来巩固学生的学习效果。

关键词

工科数学分析；概念课；常数项级数；教学设计

1 引言

基于 OBE 理念的 PBL 教学模式能有效增强学生的逻辑推理及分析问题的能力。

【基金项目】西华师范大学2022—2024年度高等教育人才培养质量和教学改革项目“基于OBE理念下的PBL教学模式在《工科数学分析》课程的探索与实践（项目编号：403787）。

【作者简介】高大鹏（1981–），女，中国四川成都人，博士，副教授，从事生物数学研究。

【通讯作者】冯世强（1980–），男，中国四川成都人，硕士，副教授，从事最优化理论及应用研究。

传统的单向输入式教学手段很难激起学生的求知欲和好奇心，课堂参与度低等易

导致学生没有真正理解概念、定理等，积累下来的问题越来越多。鉴于以上原因，本文将深度探究将 OBE 理念和 PBL 教学模式有效结合的方式，力求对传统的《工科数学分析》课程教学模式提供参考。

2 OBE 与 PBL 概述

2.1 OBE 理念

1981 年，美国学者 William G.Spady 提出一种以学习成果为导向的教育理念—OBE（Outcome based Education）。OBE 理念是一种以教学目标为导向，反向设计教学过程，依据教学产出持续改进教学设计的教学理念 [1] 。其概念可概括为：（1）聚焦学生学习成果：教育的关注点从“教师

教了什么”转向“学生学会了什么”。（2）成果导向的设计逻辑：课程体系、教学内容、评价方式均围绕预设的学习成果进行反向设计，确保所有教学活动都服务于成果的达成。（3）持续改进的质量文化：通过定期评估学生学习成果的达成度，发现教育过程中的不足，并据此优化教学目标、内容和方法，形成“目标 - 实施 - 评价 - 改进”的闭环。

OBE 理念关注学生的学习产出，将教育范式从“内容为本”转变为“学生为本”，强调以学生为中心，更加关注学习过程中的“学习成果”导向[2]。

2.2 PBL 教学模式

1969 年，由美国神经系统疾病专家 Howard Barrows 提出一种以问题为导向的教学方法—PBL（Problem based Learing）并应用于医学教育领域。PBL 教学模式是基于建构主义学习理论、认知发展理论而提出的一种教学模式，被解释为基于问题的学习[3]。其概念可概括为：（1）以问题为起点：学习从具体、复杂的问题出发，而非传统课堂中的知识点讲解。（2）以学生为中心：学生是学习的主体，需自主探究、协作讨论、提出解决方案；教师转变为“引导者”，提供资源支持和过程指导，而非直接传授知识。（3）以能力培养为目标：不仅关注知识的掌握，更注重批判性思维、问题解决能力、团队协作、沟通表达等高阶能力的培养，同时深化对学科知识的理解与应用。

2.3 OBE–PBL 融合教学模式

将成果导向的教育目标与问题导向的学习过程相结合的教学策略即为基于 OBE 理念的 PBL 教学模式[4]。OBE 理念与 PBL 教学模式的融合，本质上是通过“目标 - 路径 - 验证”的一体化设计，构建更高效、更精准的教育生态系统。于教师而言，OBE-PBL 融合教学模式使教师明确教学目标与评价标准，减少教学设计的盲目性。于学生而言，OBE-PBL 融合教学模式使学生从“被动接受知识”转向“主动追求成果”，在解决真实问题的过程中掌握核心能力，增强学习成就感与就业竞争力。将 OBE 理念与 PBL 教学模式融合，能够充分发挥二者的互补优势，形成“以成果为目标、以问题为路径”的新型教学框架。

本文以常数项级数的概念为例，运用 OBE 理念和 PBL 教学模式（以下简称为 OP 模式[5]）做出示范性教学设计，以期为广大教师进行教学设计提供参考。

3 OP 模式的设计思想

本文将把成果目标看作任务节点，由任务驱动过程衔接两个节点。学生在完成上一个任务节点后会获得下一个节点的任务描述。只有从故事线中不断发现问题并探索才能顺利完成任务。

3.1 故事引入

教学设计中有若干导入方式。以常数项级数概念教学为例，课程开始时播放神秘色彩的异域音乐同时，老师娓娓道来：古希腊有一位名叫 Zeno 的学者，早在公元前 450 年，曾提出过很多个在数学发展史上产生过重大影响的悖论。最著名的便是下面的 Achilles（希腊神话中的快跑英雄）追赶乌龟的故事[6]。

设乌龟在 Achilles 前面 A_1 处向前爬行，Achilles 在后面追赶，当 Achilles 用 t_1 秒跑完 A_1 米时，乌龟已向前爬行了 A_2 米；当 Achilles 用 t_2 秒时间跑完 A_2 米时，乌龟又向前爬行了 A_3 米……，这样的过程一直继续下去，于是，Zeno 认为 Achilles 永远也追不上乌龟。

为使学生直观理解悖论所描述的数学问题，激发学生解决问题的积极性，教师可精心设计 Flash 动画生成演示“追”与“赶”的过程[7]。看似普通的故事渲染，实际已经引导学生进入了主题，这就是 OP 模式中暗藏玄机的故事引入。

3.2 任务颁发

从顶峰成果（培养目标）反向设计达成顶峰需要什么，而不是老师要教什么。在 OP 模式中，“任务”就是这种反向设计的体现。传统课程设计中通常也会在课程开始前，为学生展示本节学习目标[5]。在 OP 模式中，从故事引入到任务颁布是顺其自然的平滑过渡，“任务”就成了学生在学习过程中必须重视的一种“学习目标”。

同样，以常数项级数概念的教学设计为例，通过故事引入，接下来颁布任务：Achilles 追赶乌龟的故事的结论显然是绝对荒谬的。毋庸置疑，Achilles 必将在 T 秒时间内，跑了 S 米后追上乌龟（T 和 S 是常数）。Zeno 的诡辩之处在于把有限的时间 T（或距离 S）分割成无穷段 t_1，t_2，……t_n（或跑过的距离 S_1，S_2，……S_n）加起来，即 $t_1+t_2+\cdots\cdots+t_n+\cdots\cdots$（或 $S_1+S_2+\cdots\cdots+S_n+\cdots\cdots$）

尽管有无限个项相加，但是它们的和却是有限数 T（或 S）。请同学们思考，这里“无限个数相加”是否有意义呢？有限个数的加法交换律，加法结合律对于无限个数相加是否仍然有效呢？以此为任务引导学生自主探索，主动学习。

3.3 线索引导

传统教学教师进行讲授新课时往往脱离所塑造的情景，不过在 OP 模式中，情景的演绎才刚刚拉开帷幕。接下来，同学们只需依托已经提供的信息按图索骥即可。回到 Achilles 追赶乌龟的故事。设乌龟的速度 v_1（m/s）与 Achilles 的速度 v_1（m/s）之比为 $q=\frac{v_1}{v_2}$，$0 < q < 1$。Achilles 在乌龟后面 S_1（m）处开始追赶乌龟。当 Achilles 跑完 S_1（m）时，乌龟已向前爬了 qS_1（m）；当 Achilles 继续跑完 S_2（m）时，乌龟又向前爬了 $S_3=q^2S_1$（m）……Achilles 继续跑完 S_n（m）时，乌龟又向前爬了 $S_{n+1}=q^nS_1$（m）……，显然 Achilles 要追赶上乌龟，必须跑完上述无限段路程 S_1，S_2，……S_n,……,[8] 由于

$$S_1+S_2+\cdots\cdots+S_n+\cdots\cdots=S_1(1+q+q^2+\cdots\cdots+q^{n-1}+\cdots\cdots) \quad ①$$

这个无限和①该怎么计算呢？这一环节引导学生沉浸式代入科学家当时的探索场景，让数学学习从知识接收转变为对线索的深度追根溯源。

3.4 问题驱动

在 OP 模式中，线索是触发学生主动提出问题的基础，任务是为学生明确探索方向的前提，整个流程最终落脚于构建问题驱动的学习过程。为了解决①式求和运算，需要首先定义无穷多个实数做加法运算，即数项级数的概念。

数项级数：设是 x_1，x_2，……x_n,……无穷可列个实数，我们称它们的“和”

$$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n+\cdots\cdots$$

为无穷数项级数（简称级数），记为$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$，其中 x_n 称为级数的通项或一般项 [9]。

由于只能依托“有限和”来延伸至“无穷和”的研究，因此需先将无穷级数进行截断处理，分析其部分和的特性，再基于部分和数列的敛散性来界定无穷级数本身的敛散性。为此，作级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$：

$$S_1=x_1,$$

$$S_2=x_1+x_2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$S_n=x_1+x_2+\cdots\ \cdots\ +x_n=\sum_{k=1}^{n}x_k,$$

$$\cdots\cdots$$

定义 [9]：如果部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于有限数 S，则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，且称它的和为 S，记为 $\mathrm{S}=\sum_{n=1}^{\infty}x_n$；如果部分和数列 $\{S_n\}$ 发散，则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散。

由此可知，①式的部分和数列的通项为 $S_n=S_1\frac{1-q^n}{1-q}$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-q}$ 。也就是说，当 Achilles 跑完 $\mathrm{S}=\frac{\mathrm{S}_1}{1-\mathrm{q}}\mathrm{m}$（即经过了时间 $\mathrm{T}=\frac{\mathrm{S}_1}{(1-\mathrm{q})\mathrm{v}_2}\mathrm{s}$），他已经追上了乌龟。至此，我们彻底解决了 Zeno 悖论问题。

4 概念延伸

级数本质上是由无限多个按顺序排列的数依次相加所构成的数学表达式。判断其是否收敛的关键，在于对应的部分和数列是否收敛。级数的求和规则与有限个数的加法有显著区别—有限个数相加时必然成立的交换律、结合律等运算规律，在级数求和中未必适用 [10]。请见下例：

例 1 对级数 1-1+1-1+…+（-1）$^{n-1}$+…的下列解法是否正确：①解法 1，原式 =（1-1）+（1-1）+…=0；②解法 2，原式 =1+（-1+1）+（-1+1）+…=1.

解：根据级数敛散性的判定规则，该级数的部分和与参与求和的项数直接相关—前偶数项相加构成的子列与前奇数项相加构成的子列，由于这两个子列各自收敛于不同的数值，因此原级数的部分和数列无法趋于同一个确定的极限，从而判定原级数发散。因此，无论解法 1 还是解法 2，均是错误的。

注：解法 1 和解法 2 实际上是对级数使用了结合律。由本题可以看出，任意项级数不具有可结合性。

5 总结应用

教学内容是教学目标得以实现的载体，一个好的教学案例无疑能加深学生对教学内容的理解。在无穷级数概念的具体应用场景中，我们以瑞典数学家海里格·科赫提出的分形理论经典案例—科赫雪花为例展开说明 [11]。

例 2 从边长为 1 的正三角形开始，首先在每一条边上对称地构造原边长 1/3 的小正三角形；接着按照这一规则持续迭代，在每一条新生成的凸边上重复相同的操作，最终形成的曲线即为科赫雪花曲线。请问该图形的面积和周长是多少？

解：设三角形周长为 p_1=3 则第一次分叉后周长为 $p_2=\frac{4}{3}p_1$ 以此类推，第 n 次分叉后图形的周长为 $p_n=\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}p_1$，n=1，2…，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\infty$

设三角形的面积为 $A_1=\frac{\sqrt{3}}{4}$，则第一次分叉后面积为 $A_2=A_1+3\times\frac{1}{9}A_1$；第 n（n=2，3…）次分叉后图形的面积

$$\begin{aligned}A_n&=A_{n-1}+3\left\{4^{n-2}\left[\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}A_1\right]\right\}\\&=A_1+3\times\frac{1}{9}A_1+3\times4\times\left(\frac{1}{9}\right)^2A_1+\cdots\ +3\times4^{n-2}\times\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}A_1\\&=A_1\left\{1+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^2+\cdots\ +\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}\right]\right\},\end{aligned}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A_1\left(1+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{9}}\right)=A_1\left(1+\frac{3}{5}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{5}$

综上，科赫雪花曲线是面积有限而周长无限的图形。

6 结语

爱因斯坦曾强调：“提出问题往往比解决问题更具有挑战性。”OBE 理念与 PBL 模式的核心关注点各有侧重—前者聚焦成果达成，后者强调问题驱动；而二者融合形成的 OP 模式，则将人才培养的核心目标锚定在学生提出问题能力的培育上。学生在故事性的氛围中发现问题，根据老师颁布的任务寻找线索，老师由此水到渠成引入数学概念带领学生解决问题，这正是课程改革所倡导的“要我学”向“我要学”的转变目标。无穷级数是工科数学分析的重要内容，希望本文教学设计能起到抛转引玉的效果，老师们能结合具体教学内容，选择适配的教学方法开展设计，始终坚守“设计”的初心。

参考文献

[1] 王逦丽,王艳.基于OBE教学理念对普通高校体育课程思政PBL教学模式的探究—以北京联合大学艺术体操课程为例[J].北京联合大学学报,2024,38（3）：15-19.

[2] 王果,潘洁晨,蔡庆空,杨福芹,张盼盼.OBE理念结合PBL方法的激光雷达实验课程教学模式研究[J].科技风,2024,28:125-127.

[3] 刘志雄.数学抽象素养背景下高中数学概念教学有效性提升策略探析[J].高考,2024（9）：153-155.

[4] 李岩.PBL教学法在医学美容技术专业教学的应用[J].科技创新导报,2020（18）：168.

[5] 王思琦,李鸿明.基于成果导向理念的问题驱动模式在物理教学中的应用—以牛顿第一定律的教学设计为例[J].物理与工程,2022,32（2）：74-77.

[6] 孙小康,张洁,张欢欢,汤焜.几何级数的起源与发展[J].教育教学论坛,2020,19:96-97.

[7] 冯颖.常数项级数概念的微课教学设计[J].高等数学研究,2017,20（3）：17-19.

[8] 贺妤函,张龙滨.关于数项级数及其敛散性概念的教学方式[J].萍乡高等专科学校学报，2007,6:5-8.

[9] 陈纪修,於崇华,金路.数学分析（下册）[M].2版.北京：高等教育出版社,2004.

[10] 张春英.常数项级数的基本概念的教学案例[J].天津城建大学学报,2014,20（5）:376-379.

[11] 邱宏.常数项级数概念引入的一种教学设计[J].教育教学论坛,2017,30：200-201.