

Appreciation of Geometric Method for Solving Static Equilibrium Problems Considering Friction

Chengjian Ju Yanping Kong

Department of Engineering Mechanics, Shijiazhuang Railway University, Shijiazhuang, Hebei, 050043, China

Abstract

The static equilibrium problem considering friction is an important part of theoretical mechanics. The analytical method often involves the simultaneous equations, which makes the solution process complicated. The geometric method has the advantages of simplicity and rapidity. In this paper, the balance problem of the ladder in the V-groove is studied, and the influence of different working conditions (the angle between the V-groove and the horizontal plane and the angle between the V-groove) and the friction angle is considered. The solving processes of geometric method and the analytical method are given respectively. Furthermore, MATLAB is used to simulate the theoretical results, and the influence of different working conditions and friction angles on the size of the safety zone of the ladder is given. Through the visual teaching method, students can not only improve their understanding of the basic principles and methods of static equilibrium problems, but also master the application of MATLAB software in mechanical analysis.

Keywords

Static equilibrium problem; Geometric method; Analytic method; MATLAB; Visualization

几何法求解考虑摩擦的静力平衡问题赏析

剧成健 孔艳平

石家庄铁道大学工程力学系, 中国·河北 石家庄 050043

摘要

考虑摩擦的静力平衡问题是理论力学中的重要内容, 解析法往往涉及方程组的联立使求解过程变得复杂, 而几何法在求解中具有简便、快捷的优点。本文对工程中常见的位于V型槽内梯子的平衡问题进行研究, 并考虑了不同工况(V型槽与水平面的夹角和V型槽夹角)和摩擦角的影响, 分别给出了几何法和解析法求解过程。进一步利用MATLAB对理论结果进行仿真分析, 直观地给出了不同工况和摩擦角对梯子安全区域大小的影响规律。通过可视化教学方法, 学生不仅可提高对静力学平衡问题基本原理和方法的理解, 还可以掌握MATLAB软件在力学分析中的应用。

关键词

静力平衡问题; 几何法; 解析法; MATLAB; 可视化

1 引言

静力学主要研究受力物体平衡时作用力应满足的条件^[1]。考虑摩擦的结构平衡研究是连接基础力学理论与工程实践的关键纽带。在众多工程领域中, 确保结构在外力作用下的稳定平衡状态是保障系统安全运行的根本前提。考虑摩擦的静力学平衡问题首先需要对结构进行受力分析, 然后列平衡方程, 最后联立求解, 这就是求解静力平衡问题的解析法。由于涉及方程联立, 该方法虽然具有普遍适用性, 但并不是求解所有问题的最佳选择。当刚体在汇交力系作用下,

该类平衡问题还可以应用几何法来求解。

位于V型槽内的梯子是工程中常见的模型, 本文分别应用几何法和解析法对其平衡问题进行研究。鉴于MATLAB在理论力学教学中的重要作用, 如高云峰^[2]探讨了MATLAB在求解刚体系统及桁架受力问题中的应用。提高了学生对该知识点的感性认识。张永存等^[3]强调了理论力学教学中引入数值模拟的重要性和便捷性。曾娟^[4]讨论了MATLAB在理论力学静力学中的应用。本文基于MATLAB软件对V型槽内梯子的平衡问题进行了数值和可视化处理, 以期提高教学效果和学生实践能力。

2 问题描述与理论计算

在课堂教学中通常以图1为例, 长为 L 的梯子水平放在夹角为 θ 的V型槽内, V形槽的左侧面与水平面的夹角为 α , 不考虑梯子的重量, 梯子与两个槽面间的摩擦角均为 φ_0 。当人在梯子上走动时, 为使梯子不在V形槽内滑动, 试

【基金项目】河北省教育厅高等教育教学改革研究与实践项目(项目编号: 2023GJJG233)。

【作者简介】剧成健(1988-), 男, 中国河北石家庄人, 博士, 讲师, 从事力学教育研究。

确定人在梯子上的活动范围。

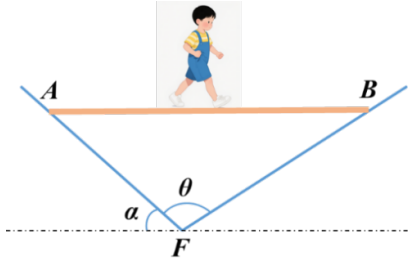


图 1

2.1 几何法

对梯子进行受力分析，如下图 2 所示，梯子在滑槽 A、B 两接触点处受到全约束反力 F_{RA} 和 F_{RB} ，此外还受到人体重力 P 的作用。根据自锁原理，全约束反力的作用线应该位于摩擦角之内，所以 F_{RA} 的作用线应该位于 AC 和 AK 之间， F_{RB} 作用线应该位于 BE 和 BK 之间。要想保持梯子的静态平衡，人体重力作用线应该与全约束反力作用线满足三力汇交原理，因此 P 作用线应该位于 G、D 两点之间，即只要求出 AG 和 BD 的长度，就可以确定小男孩在梯子的上安全活动范围。

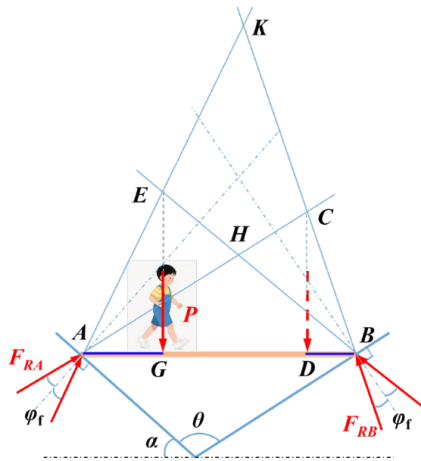


图 2 梯子所受外力作用线示意图

设 AB 长为 L ，分别在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABE$ 中应用正弦定理可得

$$\frac{L}{\sin \angle ACB} = \frac{BC}{\sin \angle BAC}, \quad \frac{L}{\sin \angle AEB} = \frac{AE}{\sin \angle ABE} \quad (1)$$

其中，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABE$ 中

$$\begin{aligned} \angle ACB &= 180^\circ - \theta, & \angle BAC &= 90^\circ - \alpha - \varphi_f \\ \angle AEB &= 180^\circ - \theta, & \angle ABE &= \alpha + \theta - \varphi_f - 90^\circ \end{aligned} \quad (2)$$

因此，BD 和 AG 的长可以表示为

$$\begin{aligned} BD &= BC \cdot \cos \angle ABC = \frac{L \cos(\alpha + \varphi_f)}{\sin \theta} \cdot \sin(\alpha + \theta + \varphi_f) \\ AG &= AE \cdot \cos \angle BAE = \frac{L \cos(\varphi_f - \alpha - \theta)}{\sin \theta} \cdot \sin(\varphi_f - \alpha) \end{aligned} \quad (3)$$

可见，通过几何法，可以很容易得到上述考虑摩擦平衡问题的解。

2.2 解析法

作为对比，下面我们应用解析法求解上述问题。分析：当人在梯子上行走时，V 型槽内的梯子可存在两种临界状态：（1）A 端沿斜面向有向上滑动趋势，B 端沿斜面向有向下滑动趋势；（2）A 端沿斜面向有向下滑动趋势，B 端沿斜面向有向上滑动的趋势。当梯子处于临界平衡状态时，分别对上述两种情况进行分析：

梯子 A、B 两端分别沿槽面分别处于向上、向下滑动的滑动趋势：对梯子进行受力分析，如下图 2 所示，梯子与滑槽在 A、B 两点处受到全约束反力 F_{RA} 和 F_{RB} ，当梯子 AB 处于临界平衡状态时，全约束反力与槽斜面法线的夹角等于摩擦角 φ_f 。人体重力作用于 D 点。

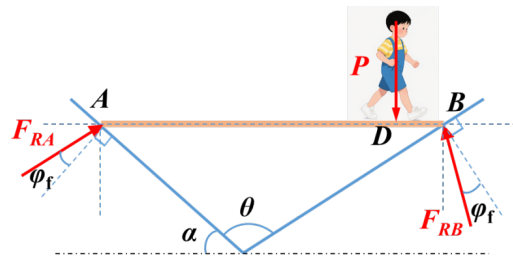


图 3 梯子受力示意图

由平面任意力系平衡方程得

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0, & F_{RA} \cdot \cos(90^\circ - \alpha - \varphi_f) \\ & - F_{RB} \cdot \sin\{90^\circ - \varphi_f - [90^\circ - (180^\circ - \alpha - \theta)]\} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0, & F_{RA} \cdot \cos(90^\circ - \alpha - \varphi_f) - P \\ & + F_{RB} \cdot \cos\{90^\circ - \varphi_f - [90^\circ - (180^\circ - \alpha - \theta)]\} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0, & F_{RB} \cdot \cos\{90^\circ - \varphi_f - [90^\circ - (180^\circ - \alpha - \theta)]\} \cdot L \\ & - P(L - DB) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

联立上述方程，可求解可得到 DB 的表达式，同理可得 A 端沿斜面向有向下滑动趋势，B 端沿斜面向有向上滑动的趋势时 AG 的表达式。

因此，解析法需要分别对两种临界状态受力分析，建立平衡方程，并且还需要联立求解方程组，几何法可以轻松得到结果，通过对比可体现出几何法在求解某些平衡问题上的优势。

3 数值结果分析

利用 MATLAB 软件对上述理论结果进行数值处理，本

问题所研究的 V 型槽与水平面间的夹角 α 和 V 型槽两斜面间的夹角 θ 可任意变化, 本节主要分析夹角 θ 以及摩擦角 φ_f 对 V 型槽内危险距离 BD 和 AG 的影响。

3.1 V 型槽夹角 θ 的影响

图 4 反映了 α 取值为 30° 、 40° 、 50° 和 60° 时, BD 和 AG 长度随 V 型槽夹角 θ ($75^\circ \sim 120^\circ$) 的变化规律。由图 4 可知, 在所给 α 的四种取值情况下, BD 与 AG 的长度随 V 型槽夹角 θ 的变化趋势相反: BD 的长度随 θ 增大而减小, 而 AG 均随 θ 的增大而增大。当 α 等于 30° 时, BD 的长度大于 AG 的长度; 当 α 等于 60° 时, BD 的长度均小于 AG 的长度; 当 α 等于 40° 时, BD 的长度在 θ 等于 100° 时与 AG 的长度相等; 当 α 等于 50° 且 θ 等于 80° 时, BD 的长度等于 AG 的长度。图 4 (c) 和 (d) 中, θ 等于 120° 时, BD 的长度趋近于 0, 说明此时, 梯子 D 端是安全的, 人踩在 D 端附近, 梯子不会下滑。

综合上述分析, 当 V 型槽两侧斜面与水平面夹角相等时, BD 与 AG 的长度相等, 这也符合对称性的要求。

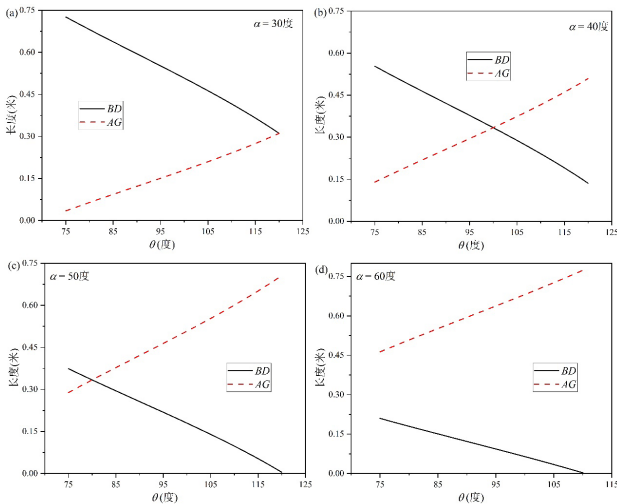


图 4 BD 和 AG 随 θ 的变化

3.2 梯子与 V 型槽之间摩擦角 φ_f 的影响

摩擦角是表征材料表面摩擦性质的量, 本节分析摩擦角对梯子两端危险位置和 AG 长度的影响。图 5 给出了 α 取值为 30° 、 40° 和 50° , 且 θ 等于 90° 时, 摩擦角 φ_f 对

BD 和 AG 长度影响, 摩擦角的取值范围为 $10^\circ \sim 30^\circ$ 。如图 5 所示, 在所有的 α 的三种取值情况下, BD 与 AG 的长度随摩擦角的增大儿减小。由图 5 可知, BD 的长度随 α 的增大而减小, 而 AG 与其呈相反的规律, 随 α 的增大而变长。如图 5 (b) 所示, 当 φ_f 对大于 28° 时, AG 长度等于于零, 表明此时, 梯子的 A 端是安全的, 小男孩踩在梯子 A 端附近, 不会下滑。

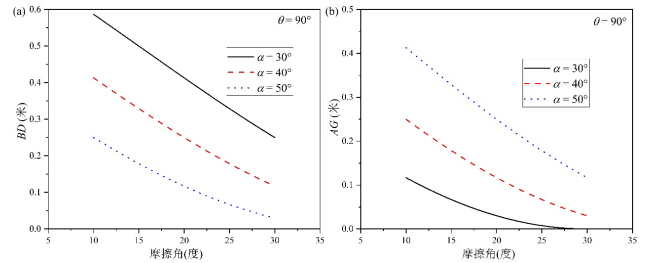


图 5 BD 和 AG 随摩擦角 φ_f 的变化

4 结语

本文通过几何和解析方法分析了不同工况下 V 型槽内梯子的平衡问题, 体现了几何法在求解某些静力学平衡问题时的高效性和有效性。进一步通过数值结果展示了不同夹角的 V 型槽在与地面呈不同夹角时, 梯子两端危险区域的变化情况。多种方法求解, 不仅巩固了学生求解平衡问题的能力, 还提高了学生处理实际问题的能力。通过以图示的方式给出摩擦角的影响, 也有助于提升学生对摩擦角的认识。上述教学方法的实施, 不仅可以使学生深入理解考虑摩擦时平衡问题的基本原理和方法, 还熟练掌握 MATLAB 软件在数值分析中的应用和可视化技巧。

参考文献

- [1] 哈尔滨工业大学理论力学教研室. 理论力学第九版 I . 高等教育出版社, 2023.
- [2] 高云峰. Matlab求解理论力学问题系列(一)刚体系统及桁架受力问题[J]. 力学与实践, 2021, 43(02): 256-261.
- [3] 张永存, 于申, 马红艳. 计算机数值模拟在理论力学教学中的应用[J]. 实验室科学, 2013, 16(03): 74-77+81.
- [4] 曾娟. Matlab在理论力学静力学中的应用[J]. 上海建材, 2025, (03): 12-16.