 DOI: https://doi.org/10.12345/jxffcxysj.v8i22.34204

Reform in Education for Advanced Algebra under International Talent Training Model——Making Researches of the Matrix *tI+A* as an Example

Wen Liu Shuo Zhang* Feifei Duan Bingling Cai

School of Mathematical Sciences, Hebei Normal University, Shijiazhuang, Hebei, 050024, China

Abstract

In response to globalization and the internationalization of education, the reform of university curricula must transcend superficial adaptations, such as the mere introduction of English textbooks or bilingual instruction. Instead, it necessitates a paradigm shift towards deep internationalization, centered on cultivating students' systematic thinking and innovative practical abilities. Using the exploration of properties of the matrix tI + A in Advanced Algebra as a case study, this paper expounds a reform pathway characterized by "in-depth inquiry and systematic teaching." This approach aims to develop students' abstract thinking and knowledge transfer capabilities, ultimately facilitating a fundamental transition from "knowledge transmission" to "ability cultivation." This will lay a solid foundation for producing high-quality, internationally competitive talents in mathematics.

Keywords

Internationalization; Matrix; Determinant; Polynomial; Adjoint matrix

国际化人才培养模式下高等代数课程改革探讨——以 *tI+A* 的性质探究为例

刘稳 张硕 * 端菲菲 蔡炳苓

河北师范大学数学科学学院，中国・河北 石家庄 050024

摘　要

为适应全球化与教育国际化的需求，高校课程改革不再是单纯引入英文教材与双语教学的表层模式，而是以培养学生系统性思维与创新实践能力为核心的深度国际化。本文以高等代数中知识点“矩阵tI+A的性质探究”为例，阐释一种“深度探究+系统教学”的改革路径，培养学生的抽象思维与知识迁移能力，实现从“知识传授”到“能力培养”的根本性转变，为造就具备国际竞争力的高素质数学人才奠定坚实基础。

关键词

国际化；矩阵；行列式；多项式；伴随矩阵

1 引言

在全球化浪潮推动教育国际化深度发展的背景下，各国对具备跨文化沟通能力、跨学科思维及国际竞争力的高素质人才需求日益迫切 [1]，高校课程体系国际化与教学模式革新成为提升人才培养质量的关键。高等代数作为数学专业本科生的核心启蒙课，是构建抽象代数思维、衔接进阶课程的桥梁，推动其教学改革是学科发展与服务国家战略人才需求的必然选择。

高等代数国际化教学中，英文教学是基础，但仅停留在语言层面无法满足人才对知识“综合运用”与“创新实践”的需求。真正的国际化培养需引导学生以系统、探究思维挖掘知识逻辑，将理论转化为解题工具。以矩阵 $tI+A$（其中 t 为参数，I 为单位矩阵，A 为 n 阶方阵）为案例，可构建“深度探究 + 系统教学”的教学路径：从其行列式是 t 的多项式切入，分析系数与 A 的联系，引导学生推导不同条件下的性质；通过案例（如证明 A 不可逆时伴随矩阵的性质）讲解应用方法；最后延伸至工程计算、数据分析等跨学科领域，让学生感受理论价值。这种教学设计能帮助学生形成从“理解”到“运用”再到“创新”的认知链条，培养系统化思维，

【基金项目】河北省高等教育教学改革研究与实践项目（项目编号：2025GJJG151）。

【作者简介】刘稳（1975–），女，中国河北深州人，博士，教授，从事代数组合学与高等代数教学研究。

【通讯作者】张硕（1967–），男，中国河北衡水人，硕士，教授，从事数学教育研究。

为后续学习与国际学术交流奠基，实现高等代数从“知识传授”到“能力培养”的转型，契合国际化人才需求。

2 范例展示

矩阵 $tI+A$ 是连接行列式、多项式、A 的可逆性、A 的特征多项式等核心概念的关键纽带，其性质（如行列式随参数 t 的变化规律、秩的动态变化特征、特征值与参数 t 的关联等）贯穿于矩阵理论的多个模块，且在微分方程求解、控制理论、密码学等实际领域具有广泛应用，能帮助学生串联分散知识、建立系统认知。下面就以“矩阵 $tI+A$ 的性质探究”为例，阐释“深度探究＋系统教学”的方式，探索具备国际竞争力数学人才培养路径。

设 $\mathbb{F}$ 是一个数域，A 是 $\mathbb{F}$ 上的一个 n 阶方阵，I 是 n 阶单位矩阵，$t\in\mathbb{F}$。矩阵 $tI+A$ 的行列式

$$\det(tI+A)=\begin{vmatrix} t+a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & t+a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & t+a_{nn} \end{vmatrix},$$

这是一个关于 t 的 n 次多项式，记为 $f(t)$。

性质 1. 设 $f(t)=t^n+a_1t^{n-1}+\cdots+a_{n-1}t+a_n$，则 a_i 是 A 的 i 阶主子式之和（$i=1,\ldots,n$），特

别地，$a_1=\mathrm{tr}(A)$，$a_n=\det(A)$。

证明：由第二章 [2] 补充题 2 可知

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} t+a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & t+a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & t+a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}\det(B_j(t)),$$

其中，$B_j(t)$ 除了第 j 列为

$$(\frac{d}{dt}(a_{1j}),\ldots,\frac{d}{dt}(a_{j-1j}),\frac{d}{dt}(t+a_{jj}),\frac{d}{dt}(a_{j+1j}),\ldots,\frac{d}{dt}(a_{nj}))^T,$$

即 $(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$，外，其余列均与矩阵 $tI+A$ 的对应列相同。用此方法求出微商

$f'(t),f''(t),\ldots,f^{(n-1)}(t)$，再令 $t=0$，即可得 a_i（$i=1,\ldots,n$）。

性质 2. 设 A 为一个 n 阶矩阵，则存在 $t_1,\ldots,t_k\in\mathbb{F}$（$k\le n$），使得当 $t\ne t_1,\ldots,t_k$ 时，$f(t)\ne 0$。

证明：由代数基本定理，设 $f(t)$ 在 $\mathbb{F}$ 中有 $k(k\le n)$ 个根 $t_1,\ldots,t_k$。当 $t\ne t_1,\ldots,t_k$ 时，$f(t)\ne 0$。结论得证。

2.1 实数域上矩阵 $tI+A$ 的性质

当 $\mathbb{F}$ 为实数域时，我们可以得到如下性质。

命题 1. 设 A 为一个 n 阶实矩阵，则当 t 足够大时，$f(t)>0$。

证明：注意到此时 $f(t)$ 是一个实系数多项式。由因式分解定理，设

$$f(t)=(t-a_1)\cdots(t-a_s)(t^2+p_1t+q_1)\cdots(t^2+p_rt+q_r),$$

这里 a_i 为实数，$t^2+p_jt+q_j$ 为实数域上的不可约多项式，$i=1,\ldots,s,j=1,\ldots,r$，且 $s+2r=n$。取 $t^*=\max\{a_1,\ldots,a_s\}$，则当 $t>t^*$ 时，$f(t)>0$。

推论 1. 设 A 是实对称矩阵，证明：当 t 足够大时，$tI+A$ 为正定矩阵。

证明：记矩阵 $tI+A$ 的 i 阶顺序主子式为 $\det(tI+A)_i$。则 $\det(tI+A)_i$ 是一个实系数的关于

t 的 i 次多项式。由命题 1，存在实数 $t_1^*,\ldots,t_n^*$，使得当 $t>t_i^*$ 时，$\det(tI+A)_i>0$。令

$t_{\max}=\max\{t_1^*,\ldots,t_n^*\}$，则当 $t>t_{\max}$ 时，$tI+A$ 的所有的顺序主子式都大于零，于是 $tI+A$ 为正定矩阵。

命题 2. 设 A 是实对称矩阵，证明：A 可表示为两个正定矩阵之差。

证明：由推论 1，存在实数 $c>0$ 使得 $cI+A$ 正定，显然 $A=(cI+A)-cI$。

命题 3. 设 A 是 n 阶实矩阵，证明：A 可表示为两个可逆矩阵之差。

证明：由命题 1，存在实数 $c>0$ 使得 $cI+A$ 可逆，显然 $A=(cI+A)-cI$。

命题 4. 设 A 是 n 阶实对称矩阵，证明：存在一正实数 c 使得对任一实 n 维向量 X 都有 $|X^TAX|\le cX^TX$。

证明：只需证明存在一正实数 c 使得对任一实 n 维向量 X 都有 $-cX^TX\le X^TAX\le cX^TX$，

即 $X^T(cI+A)X\ge 0$ 且 $X^T(cI-A)X\ge 0$。由推论 1，对 A 和 $-A$ 分别存在正实数 c_1,c_2 使得 c_1I+A,c_2I-A 正定。取 $c=\max\{c_1,c_2\}$，则 $cI+A,cI-A$ 均正定。因此，对任一实 n 维向量 X 都有 $X^T(cI+A)X\ge 0$，$X^T(cI-A)X\ge 0$。

命题 5 设 A 为实反对称矩阵，则对任意的 $t\ne 0$，$tI+A$ 是可逆的。

证明：由 A 反对称，对任意的 $0\ne X\in\mathbb{R}^n$，$X^TAX=0$。于是 $X^T(tI+A)X=tX^TX$。由

$t\ne 0,X\ne 0$ 可知 $X^T(tI+A)X\ne 0$，进而 $(tI+A)X\ne 0$。这说明 $(tI+A)x=0$ 只有零解，

因此 $tI+A$ 可逆。

命题 6 设 A 为实反对称矩阵，则对任意的 $t>0$，$\det(tI+A)>0$。

证明：由 A 反对称可知，$-A$ 反对称，且 $-A$ 的特征值为 0 或纯虚数。于是

$$\det(tI+A)=t^s(t^2+q_1)\cdots(t^2+q_r),$$

这里 $q_j>0$，$j=1,\ldots,r$，且 $s+2r=n$。显然，当 $t>0$ 时，$\det(tI+A)>0$。

2.2 矩阵 $tI+A$ 在伴随矩阵相关性质中的应用

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的一个 $n(n\ge 2)$ 阶方阵，A^* 是 A 的伴随矩阵。

命题 7. $(AB)^* = B^* A^*$

证明：当 A,B 均可逆时，由于 $A^* = |A| A^{-1}, B^* = |B| B^{-1}$，我们有

$(AB)^* = |AB| (AB)^{-1} = (|B| B^{-1})(|A| A^{-1}) = B^* A^*.$

结论成立。

当 A,B 中恰有一个可逆时，不妨设 A 可逆，B 不可逆。由性质 2，存在

$t_1,\ldots,t_k \in \mathbb{F}$（$k \le n$），使得当 $t \ne t_1,\ldots,t_k$ 时，$\det(tI+B) \ne 0$。此时，由上述情形可得

$$(A(tI+B))^* = (tI+B)^* A^*。$$

设上式左右两边的 (i,j) 元素分别为 $l_{ij}(t) = r_{ij}(t)$ 和，它们均是关于 t 的多项式，且当 $t \ne t_1,\ldots,t_k$ 时，对任意的 $i,j = 1,\ldots,n$，$l_{ij}(t) = r_{ij}(t)$。因此多项式 $l_{ij}(t) = r_{ij}(t)$。于是，当 $t = 0$ 时，对任意的 $i,j = 1,\ldots,n$，$l_{ij}(0) = r_{ij}(0)$，从而 $(A(0I+B))^* = (0I+B)^* A^*$，即 $(AB)^* = B^* A^*$。

当 A,B 均不可逆时，由性质 2，存在 $t_1,\ldots,t_{k_1}$；$s_1,\ldots,s_{k_2} \in \mathbb{F}$（$k_1,k_2 \le n$），使得当 $t \ne t_1,\ldots,t_{k_1}, s_1,\ldots,s_{k_2}$ 时，$\det(tI+A) \ne 0, \det(tI+B) \ne 0$。此时，

$$((tI+A)(tI+B))^* = (tI+B)^*(tI+A)^*。$$

类似于上面的讨论，可得

$$((0I+A)(0I+B))^* = (0I+B)^*(0I+A)^*,$$

即 $(AB)^* = B^* A^*$。

（注：该命题的证明主要参考文献 [3]）

命题 8. A^* 是 A 的多项式。

证明：当 A 可逆时，设 A 的特征多项式为 $f(t)$，由性质 1，$f(t)$ 的常数项 $a_n = \det(A) \ne 0$。

结论成立。

当 A 不可逆时，由性质 2，存在 $t_1,\ldots,t_k \in \mathbb{F}$（$k \le n$），使得当 $t \ne t_1,\ldots,t_k$ 时，$\det(tI+A) \ne 0$。此时，由上述情形可得

$$(tI+A)^* = g(tI+A),$$

其中 $g(tI+A)$ 是 $tI+A$ 的多项式。比较上式左右两边的 (i,j) 元素，与命题 7 的证明类似，可得 $(0I+A)^* = g(0I+A)$，即 $A^* = g(A)$。结论得证。

矩阵 $tI+A$ 的性质探究案例表明，有效的教学应打破“碎片化讲解”与“纯理论灌输”的传统模式，通过锚定核心知识点、串联多模块内容、联动理论与实践，实现从“教知识”到“育能力”的转型。

3 教学启示

矩阵 $tI+A$ 的性质探究案例以“核心知识点为锚点、能力培养为核心、国际需求为导向”的改革逻辑，可提炼出以下教学启示，为高等代数课程突破传统教学局限、实现国际化与系统化转型，提供具体可落地的实践路径。

3.1 课程定位需衔接国际化人才培养目标

明确高等代数作为代数方向“启蒙”与“桥梁”的双重角色，相关教学设计需跳出单一知识传授，围绕“夯实理论基础＋培养应用能力＋对接国际范式”展开。其中，理论基础要强化核心定理的逻辑推导，应用能力可通过简单数学软件实操（如用 MATLAB 解线性方程组）提升，国际范式则需融入通用术语与符号。同时，要确保课程内容与近世代数、矩阵分析等后续课程及国际数学教育标准衔接，为学生参与国际学术交流和跨领域实践铺垫基础。

3.2 国际化教学应超越语言层面，聚焦能力提升

英文教学（双语课件、英文文献选读等）需作为工具而非核心目标，重点通过语言载体引导学生接触国际数学领域的思维范式与表达逻辑，比如在课件中同步呈现中英文定理表述，选读简短外文案例解析。同时避免陷入“语言形式化”误区，始终以知识的深度理解与综合运用为核心，通过双语对照解析专业术语背后的数学逻辑，助力学生精准把握概念本质，进而提升跨文化学术沟通能力。

3.3 知识点教学需构建“系统化探究路径”

针对核心知识点（如矩阵 $tI+A$），摒弃“碎片化讲解”模式，设计“概念溯源—性质推导—应用实践—拓展延伸”的闭环教学流程。先引导学生关联已有知识（行列式定义、矩阵运算、特征多项式定义）推导性质，教学过程中再通过提问互动深化理解。同时通过具体案例（伴随矩阵与矩阵的关系、多项式相等的判断）强化应用，搭配课堂小练习检验掌握情况，最后延伸至跨学科场景（控制理论、数据分析），帮助学生形成“理论—应用—价值”的完整认知。

3.4 注重以“核心知识点”为锚点，串联多模块内容

利用矩阵 $tI+A$ 这类“纽带型”知识点，打破高等代数内部章节的壁垒，串联行列式、矩阵可逆、特征多项式等分散内容——比如从 $tI+A$ 的行列式展开推导特征多项式，借其可逆性条件关联矩阵可逆判定，让学生直观感知知识间的逻辑关联。通过“以点带面”的教学方式，培养学生的系统化思维，避免孤立记忆知识点，提升其整合与运用多模块知识解决复杂问题的能力。

3.5 强化“理论—实践”联动，凸显数学实用价值

在实践教学中融入知识点的实际应用场景（如矩阵 $tI+A$ 在微分方程求解、密码学加密算法构建中的应用），通过具体案例分析、小组协作完成简化版实践任务等形式，让学生直观体会数学理论对现实问题的解决价值。同时，精准契合国际化人才“知行合一”的培养要求，助力学生搭建理论与实践的衔接桥梁。

4 总结

本文以矩阵 $tI+A$ 的性质探究为案例，借单一知识点串联多模块教学，为高等代数提供深挖知识内涵、引导跨模块解题的范例，打破传统模块孤立局限，助学生构建系统代数

体系，提升教学质量。同时，其强化知识运用与实践能力，契合国际化人才需求，为课程对接国际标准、培养国际化数学人才提供参考。

参考文献

[1] 全球化智库(CCG)课题组. 中国国际化人才培养白皮书 2023[DB]. 国际人才培养与发展论坛,2023.

[2] 北京大学数学系前代数小组编，王萼芳，石生明修订.高等代数[M].第五版.北京：高等教育出版社，2019.

[3] 樊恽，刘宏伟.线性代数与解析几何教程（上册）[M].北京：科学出版社，2009.