

Teaching Design and Implementation of Large Units from the Perspective of Mathematical Modeling Literacy: A Case Study of “One-variable Linear Regression Model and Its Application”

Fenglin Yin

Qilin High School Zhuhai City Guangdong Province, Zhuhai, Guangdong, 519100, China

Abstract

The design of a large-unit teaching plan from the perspective of mathematical modeling literacy, based on mathematical modeling literacy, takes the “univariate linear regression model” as the carrier to conduct systematic and coherent teaching design. By using problem-driven approaches, students go through data collection, organization, and analysis, observing and conjecturing the relationship between two variables to identify the univariate linear regression model. Through group cooperative exploration, parameters in the model are solved, and by applying the model in new scenarios, students’ problem-solving abilities are enhanced. By comparing the teaching effects of the experimental class and the control class, it is found that adopting the large-unit teaching approach can improve students’ ability to integrate knowledge and solve problems, making it an effective way to enhance mathematical core literacy.

Keywords

Mathematical Modeling Literacy; Large-Unit Teaching; Univariate Linear Regression Model

数学建模素养视角下的大单元教学设计与实施——以“一元线性回归模型及其应用”为例

尹锋霖

广东省珠海市麒麟中学, 中国·广东 珠海 519100

摘要

数学建模素养视角下的大单元教学设计, 基于数学建模素养, 以“一元线性回归模型”为载体, 进行系统、连贯的教学设计。利用问题驱动, 学生经历数据收集、整理和分析, 对两个变量间的关系进行观察、猜想等找出一元线性回归模型; 利用小组合作探究, 求解模型中参数, 通过模型在新情境的应用, 提高学生解决问题的能力。对比实验班与对照班的教学效果, 采用大单元教学方式能提高学生对整合知识和解决问题的能力, 是提升数学核心素养的有效途径。

关键词

数学建模素养; 大单元教学; 一元线性回归模型

1 引言

在2020年10月,《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》(以下简称“课标(2020年修订)”)正式发布,提出高中数学六大核心素养成为推进教育改革的

【课题项目】本文系珠海市教育科研“十四五”规划课题“核心素养视域下高中数学大单元教学设计与实践研究(批准号:2025ZHGHKT122)”的研究成果。

【作者简介】尹锋霖(1989-),女,中国湖南邵东人,硕士,中学一级教师,从事高中数学教学研究。

关键动力^[1],课堂教学是落实核心素养的重要途径。传统的教学设计中只考虑知识点的单一性,忽视知识的完整和连续性,大单元教学被视为一种涵盖目标设定、内容整合、教学执行与评价反思环节于一体的“整体性”学习实践活动^[2],因此研究大单元教学对于学生、老师和新课程改革都有着很重要的作用。

本文以人教A版《数学》(选择性必修第三册)第八章“成对数据的统计分析”中的“8.2一元线性回归模型及其应用”第一课时为例,探讨在数学建模素养视域下采用大单元教学理念,如何开展教学设计及实施,从而实现“教、学、评”一致性,培养学生的数学核心素养。

2 大单元教学分析

2.1 学情分析

已有知识：学生掌握了收集、整理和分析数据方法，能利用表格和图形发现单个变量的统计规律，会判断两个变量间的关系，通过散点图直观感受两个变量间相关性的强弱，运用样本相关系数衡量两个变量的相关程度。

最近发展区：一元线性回归方程的参数求解。

认知特点：在散点图中，学生能从整体上分析，去找一条直线，让各散点尽可能都落在直线上或者附近，具有一定的直观想象能力，有较强的自主和合作学习能力。但有个别学生在直观想象和逻辑推理存在差异性，需要针对性指导。

2.2 教材分析

根据统计学的研究过程，成对数据的统计分析遵循“收集、整理和分析”等过程。依据数学建模的思想，根据数据或图形的规律，假设模型、模型求解、模型诊断与修正和模型应用的历程。本节中学生通过散点图判断两个变量之间存在线性相关性，但不会如何用数学方法来刻画“从整体上看，各散点与直线最接近”，体会引入最小二乘法的必要性。因此本节课的重点是一元线性回归模型的含义，最小二乘法估计模型中的参数；难点是一元线性回归模型参数最小二乘估计的推导，解释预测值的含义。

依据大单元教学理念，将从知识内容、基本技能和核心素养三个方面进行梳理和整合，如图1。

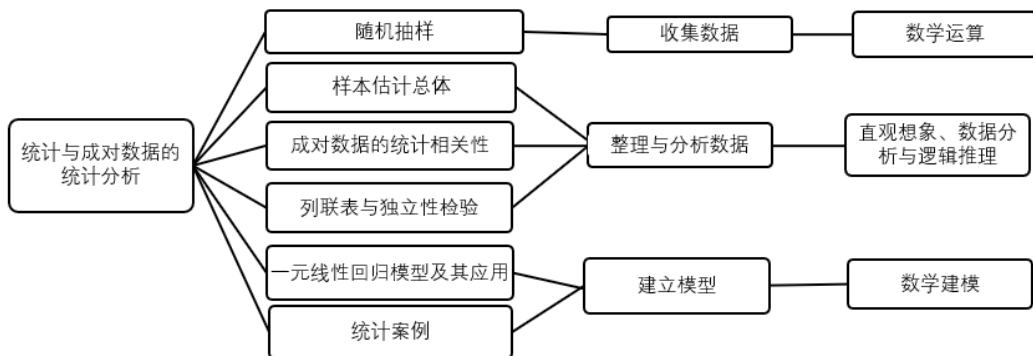


图1

2.3 教学目标分析

学生经历完整的统计活动过程，进一步体会应用统计的思想和方法解决实际问题^[3]，提升学生的数据分析和直观想象素养；

通过散点图理解一元线性回归模型的含义，明确模型与一次函数的区别与联系，弄清模型中的因变量是个随机变量，培养学生的数学抽象素养；

利用小组合作探究经验回归直线的恰当位置，了解用竖直距离和来刻画“从整体上看，散点接近整体的程度”，培养学生的数学转化思想和发散思维；

(4) 掌握一元线性回归模型参数的含义及求法，会用模型解决实际问题，培养学生解决问题的能力，提高数学运算和数学建模素养。

2.4 设计思路分析

学生已经具有基本的统计思想和方法来解决问题，课前对学生分组，设置合理的情境问题，让学生去收集、整理和分析数据，动手绘制散点图，由图得出一元线性回归模型。组内讨论如何找出一条直线，使各散点从整体上与此直线尽可能接近。课堂展示学生的课前的成果，师生从多角度探究“从整体上，各点与直线最接近”，共同得出最小二乘法求解模型参数的方法。设置新情境应用模型，提高学生解决问题的能力。课后追踪对比实验班与对照班的大单元前

后测试学生的认知学生，分析大单元教学实施的效果。

3 课前准备

情境：俗话说数理化为一家，物理成绩好往往数学成绩也好，你能应用统计相关知识来说明这一现象吗？

设计意图：通过情境问题，激发学生学习数学的动机和兴趣。

教师：将全班同学分为6个小组，每8人为一组，第1组收集本校月考的物理和数学成绩，第2组整理和分析收集的数据，每组利用整理后的成对数据，以横轴表示数学成绩、纵轴表示物理成绩建立直角坐标系，将成对数据表示为散点，绘制2个、4个和6个成对数据的散点图。

设计意图：让学生感受统计知识在实际生活中的应用，用随机抽样的方法得到样本数据具有代表性，提高学生的实践动手的能力。将数据转化为图形语言，培养数据分析和直观想象素养，也为本节课的内容作铺垫。

4 课堂教学 落实素养

4.1 问题驱动 探究含义

问题1：各组观察课前绘制的散点图，观察散点的分布规律是什么？

设计意图：由图直观得出散点大致分布在一条从左下

角到右上角的直线附近,说明物理成绩与数学成绩线性相关而不是函数关系,从定义的角度启发学生理解知识点间的联系与区别,追溯本源。

问题 2: 样本相关系数是多少?

设计意图: 用数据说明物理成绩和数学成绩正线性相关,且相关程度很高。由感性认知上升到理性认知,体现了严谨的科学态度,培养学生的数学运算素养。

问题 3: 物理成绩受到数学成绩影响外,还存在哪些影响因素?

设计意图: 把其它影响因素定为随机误差,假定随机误差均值为 0,方差与数学成绩无关的定值,探究一元线性回归模型的含义,培养学生的数学抽象素养。

问题 4: 一元线性模型中某位学生的数学成绩为 x_i , 物理成绩一定是 $ax_i + b$?

设计意图: 区分模型中的因变量与函数的因变量的区别,函数的因变量是一个确定的数值;在一元线性模型中,当一位学生的数学成绩是 x_i , 物理成绩可能是 $ax_i + b$ 可能不是,因变量是一个随机变量。通过与函数的因变量辨别,深入理解一元线性模型的含义。

2 小组合作 剖析概念

问题 5: 如何寻找一条恰当直线,使散点在整体上与这条直线最接近?

学生活动: 小组内部讨论、画图分析问题。

学生 1: 根据课前绘制的散点图,猜想是一条直线经过的图中的散点越多越好,或者直线两侧点的个数基本相同。

学生 2: 我们认为是各个点到一条直线的距离和最小。

学生 3: 多画几条直线,求这些直线的斜率和截距的平均值作为所求直线的斜率和截距。

设计意图: 通过小组合作探索问题,能培养学生的沟通和团队协作能力,提高学习兴趣,促进思维发展。

教师: 以上同学想法都有一定道理,但是样本数据很多时,实际操作很困难。展示自己收集 20 个样本数据,采用 MATLAB 软件绘画成散点图,并绘画多条经过点的点越多的直线,来验证同学们的猜想,如图二所示:若一条直线经过的点越多越好,虽然有一定的道理,但是缺乏严格的理论依据。问题的关键是如何将“近似”精确化,定量刻画“从整体上看,各散点与此直线最接近”?

师生活动: 从图 2 中,设直线方程 l 为: $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$, 这组同学画出了用各个点到直线的距离,那么猜想各个距离和最小时求出斜率 \hat{b} 与截距 \hat{a} 。设第 i 个点 (x_i, y_i) 到这条直线的距离为 d_i , 则根据距离公式得出:

$$d_i = \frac{|\hat{b}x_i - y_i + \hat{a}|}{\sqrt{(\hat{b})^2 + 1}}$$

各个点到直线 l 的距离和为: $d = \sum_{i=1}^n d_i$, 当 d 要求最小时的 \hat{b} 与 \hat{a} 的值。

这种处理计算量非常大,转化成找各个点的纵坐标到直线对应的纵坐标的距离(称为竖直距离),记作:

$$d'_i = |y_i - \hat{y}_i| = |y_i - (\hat{b}x_i + \hat{a})|$$

来刻画各个样本数据与直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的“整体接近程度”,求出斜率 \hat{b} 与截距 \hat{a} 的值。但此时涉及绝对值,计算过程复杂且繁冗,进步转化为竖直距离的平方和来简化计算量,记作:

$$Q = (y_1 - (\hat{b}x_1 + \hat{a}))^2 + (y_2 - (\hat{b}x_2 + \hat{a}))^2 + \dots + (y_n - (\hat{b}x_n + \hat{a}))^2 \quad (2)$$

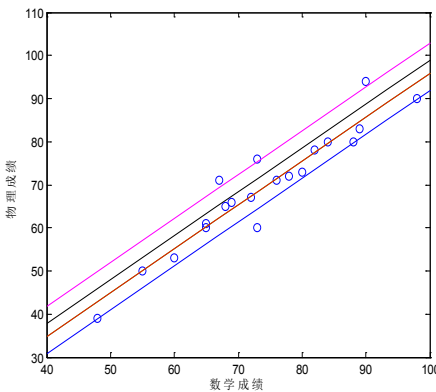
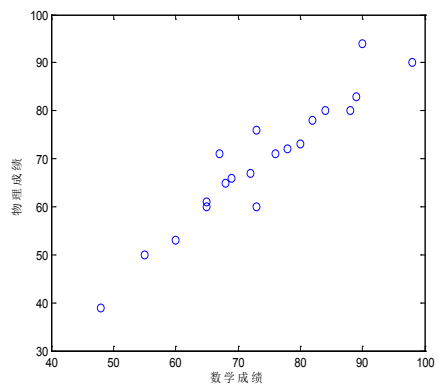


图 2

当 Q 最小时,即表示各点到直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的“各散点与直线最接近”。

设计意图: 把点到线的距离转化竖直距离,简化了计算过程,再将几何问题转换为代数问题,渗透转化的数学思想。

问题 6: 若 (2) 式中的每项展开求和,计算困难,如何对每个平方式变形来简化求解?

设计意图: 通过问题引导学生思考的方向,教师板书详细解答过程得出

$$\begin{cases} \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \\ \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$, $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$, 求出回归直线方程为:

$\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$, 对应的图形称为经验回归直线(一定过点 (\bar{x}, \bar{y})), 这种求经验回归方程的方法称为最小二乘法。

问题7: (3)式中参数 \hat{b} 的公式与哪个公式结构相似?

设计意图: 通过对比上节课中的线性相关系数 r 的公式, 将旧知与新知整合联系到一起, 体现大单元教学思想。

4.3 典例分析 巩固概念

例1 有一个同学家开了一个小卖部: 他为了研究气温对热饮销售的影响, 经过统计卖出热饮杯数与当天气温的对比表:

摄氏温度 /°C	-5	0	4	7	12	15	19	23	27	31	36
热饮杯数	156	150	132	128	130	116	104	89	93	76	54

(1) 画出散点图; (2) 求一元线性回归方程; (3) 如果某天的气温是 2 °C, 预测这天卖出的热饮杯数。

设计意图: 加强学生对模型的应用能力, 让学生体会负相关的线性回归模型在生活中的应用。

4.4 课堂小结

问题8: 通过本节课的学习, 你掌握了什么数学知识和技能, 感受了哪些数学思想, 其它收获有哪些?

【设计意图】让学生思考归纳本节课的学习内容, 教师在学生的回答过程中善于引导, 让其将本节内容整合连贯起来并生成思维导图。

5 课后追踪

选取本校高二两个平行班级作为实验班(简称A班), 按着本研究设计开展教学; 在平行班级中再选两个班级为对照班(简称B班), 按传统教学方式教学。周测前表明, 所有班级整体水平不存在明显差异性。

课后分别对两个班的学生学习效果进行检测(考试成绩)和问卷调查(大单元教学是否对自己有帮助), 通过调查得出以下结果, 如图3所示:

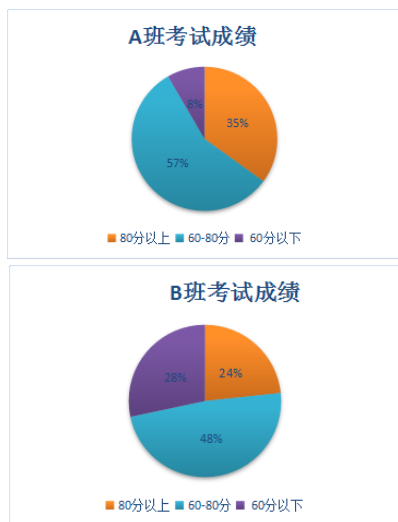


图3 A与B班考试成绩对比图

A班的考试成绩整体情况比B班要优秀很多, A班的学生在数据的收集、整理、处理与数学建模的过程中, 能深刻理解两个变量之间的关系, 能对线性回归方程的参数公式理解和记忆的更为深刻, 并能快速建立线性回归模型解决实际问题。而B班的学生虽然当时能清晰记忆公式, 但隔了几天后, 大部分学生对公式的记忆已经模糊, 且不能灵活运用知识用来解决实际问题。

大单元教学中, 学生会遇到或提出一些凭借自己目前的数学知识无法解决的问题, 这时他们会通过小组探究和查阅资料等方式来解决所遇到的难题。这更能培养他们的团队合作精神、人际交往能力、分析问题的能力、解决问题的能力、创新思维, 从而增加学生对数学的兴趣^[4]。

在大单元教学模式下, 学生通过自己动手收集数据、处理数据, 再进行探究、发现、思考、分析、归纳等过程, 既能使学生深刻理解知识, 又能提升学生的数学核心素。因此大单元教学是促进和发展学生数学核心素养的有效途径。

参考文献

- [1] 姜宇, 辛涛, 刘霞等. 基于核心素养的教育改革实践途径与策略[J]. 中国教育学刊, 2016, (06): 29-32+73.
- [2] 崔允漷. 如何开展指向学科核心素养的大单元设计[J]. 北京教育(普教版), 2019(02): 11.
- [3] 黄润华. "一元线性回归模型"教学设计[J]. 中国数学教育: 高中版, 2021(5):7.
- [4] 甘永林. 基于“培养数学核心素养”的高中数学实验教学模式探究——以指、对数函数图像及性质教学为例[J]. 数学学习与研究, 2017(23).
- [5] 成海奎, 陈雪梅. 人教A版普通高中教科书《数学》(选择性必修第三册)[M]. 人民教育出版社, 2020.
- [6] 李龙才. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M]. 人民教育出版社, 2020.
- [7] 成海奎, 陈雪梅. 人教A版普通高中教科书《教师教学用书》(选择性必修第三册)[M]. 人民教育出版社, 2020.