Linear Algebra Experiment Case: Matrix Decomposition for Solving Image Problems

Xiaokai Chang

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou, Gansu, 730050, China

Abstract

As a core topic in the "Linear Algebra" curriculum, matrix decomposition plays a pivotal role in numerous fields, particularly in image processing, where many problems fundamentally involve matrix decomposition calculations. This paper designs mathematical experiment cases based on matrix multiplication decomposition and addition decomposition for image compression and foreground-background separation. These cases can help students better understand matrix concepts, cultivate their numerical computation and programming skills, and thereby enhance their interest in learning "Linear Algebra."

Keywords

Linear algebra; matrix decomposition; mathematical experiment; image processing

线性代数实验案例：矩阵分解解决图像问题

常小凯

兰州理工大学理学院，中国·甘肃 兰州 730050

摘　要

矩阵分解作为《线性代数》中的核心内容，在众多领域扮演着举足轻重的角色。尤其在图像处理中，很多问题本质上是矩阵的分解计算。本文基于图像压缩和视频前景背景分离问题，设计了矩阵的乘法分解和加法分解数学实验案例，这些案例可以帮助学生更好地理解矩阵的概念，培养学生数值计算能力和程序编写能力，进而提高学生学习《线性代数》的兴趣。

关键词

线性代数；矩阵分解；数学实验；图像处理

1 案例背景与意义

矩阵分解能够揭示矩阵的内在结构和特性，为解决多种数学问题提供有力的工具。例如在求解线性方程组、计算矩阵的逆、确定矩阵的秩等基础问题上，矩阵分解都提供了高效且巧妙的方法。通过将复杂的矩阵分解为若干个结构简单的矩阵的乘积或和，能够把原本复杂的计算和分析过程简化，使得问题的解决思路更加清晰。矩阵分解还能够对信号进行特征提取和降噪处理，帮助从复杂的信号中获取关键信息等 [1-2]。

学习矩阵分解能够帮助学生深化对《线性代数》基本概念和理论的理解，如向量空间、线性变换、矩阵的秩、特征值与特征向量等，这些概念是线性代数的核心，而矩阵分解则是将这些抽象概念有机联系起来的桥梁，能让学生从更宏观和深入的角度把握《线性代数》的知识体系 [3]。通过图像处理案例和实验教学，学生能够掌握矩阵分解的算法实现和应用技巧，提升编程能力和解决实际问题的能力。这对于培养学生在数学、计算机科学、工程等多个领域的综合素养具有重要推动作用，为他们今后从事相关领域的研究和工作奠定坚实的基础 [4]。

本文利用矩阵分解设计了图像处理教学案例，涵盖了矩阵乘积分解和加法分解在图像处理领域的应用。通过构建这些应用案例，让学生全面了解矩阵分解在解决实际问题中的多样性和有效性。同时，强化实践教学环节，给出主要理论分析和程序（MATLAB 和 Python）实现代码，并对数值结果进行深入分析。

2 案例设计

《线性代数》课堂教学课时通常有限，如何将应用案例教学穿插于课堂教学之中是一个挑战性的问题。基于矩阵分解的知识体系及其图像的相关知识，教学案例设计如下。

2.1 矩阵分解的基本概念，原理和实现

2.1.1 矩阵乘积分解

矩阵乘积分解 [5]，即将一个矩阵表示为若干个矩阵的

【基金资助】兰州理工大学 2023 年度学校高等教育研究项目 (GJ2023B-62)。

【作者简介】常小凯（1984-），男，中国甘肃通渭人，博士，副教授，从事最优化理论与算法研究。

乘积形式，这种分解能够揭示矩阵的内在结构和特性。常见的矩阵乘积分解方法包括 LU 分解、QR 分解和奇异值（SVD）分解等，它们各自基于不同的原理，适用于不同的场。本案例以 SVD 分解为例进行设计。

SVD 分解是将一个 $m\times n$ 矩阵 A 分解为三个矩阵的乘积：

$$A=U\Sigma V, \tag{1}$$

其中 U 是一个 $m\times m$ 的正交矩阵（即满足 $UU^T=I,I$ 为单位矩阵），Σ是一个 $m\times n$ 的对角矩阵，对角线上的元素称为奇异值，记为σ_i $(i=1,\ldots,r)$, $r=\min(m,n)$, 且奇异值按从大到小的顺序排列，通常非零奇异值的个数等于矩阵 A 的秩；V 是一个 $n\times n$ 的正交矩阵。SVD 分解在数据降维、图像压缩、推荐系统等领域有着广泛的应用。以图像压缩为例，灰度图像可以表示为一个矩阵，通过 SVD 分解可以将图像矩阵分解为低秩矩阵的乘积，去除较小的奇异值对应的部分，从而在保留图像主要特征的同时实现数据压缩，减少图像存储所需的空间。

2.1.2 矩阵加法分解

矩阵加法分解是将一个矩阵表示为若干个矩阵之和的形式，这种分解方式在数值计算、线性方程组求解和视频图像分离等领域有着重要的应用。常见的矩阵加法分解方法包括雅克比（或者高斯 - 赛德尔）分解和低秩稀疏分解等，雅克比和高斯 - 赛德尔分解主要应用于线性方程组的求解算法设计，而低秩稀疏分解主要应用于视频图像分解和去噪。

低秩稀疏分解是将一个 $m\times n$ 图像矩阵 A 分解为两个或者三个矩阵的和，如分为三个矩阵的和可表示为

$$A=L+S+N, \tag{2}$$

其中L表示低秩的部分，S表示稀疏的部分，N表示图像的噪音。要实现矩阵的低秩稀疏分解，MATLA 和 Python 平台目前没有现成的命令进行直接的求解，需要求解下面的数学优化模型

$$\begin{aligned} \min \quad & \|L\|_* +\mu\|S\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & L+S+N=A,\ N\in E, \end{aligned} \tag{3}$$

这里$\mu>0$ 是平衡参数（平衡稀疏和低秩分量），$\|L\|_*$ 表示矩阵 L 的核范数（体现矩阵的秩）。

$\|S\|_1$表示矩阵 S 的 1 范数（体现矩阵的稀疏性）。

E 是一个集合（用于约束噪音 N）。优化模型 (3) 可以利用目标函数的邻近算子和成熟的原始对偶分裂算法，如 Chambolle-Pock 算法，Chang-Yang 凸组合原始对偶算法和交替方向乘子法等获得近似解。

2.2 图像压缩案例

2.2.1 背景描述和分析

随着数字化技术的飞速发展，图像数据的存储和传输需求日益增长。在日常生活和众多专业领域中，大量的图像需要被处理和存储。然而，原始图像数据往往占据较大的存储空间，这不仅增加了存储成本，还在数据传输过程中带来了带宽限制和传输时间长等问题。通过矩阵分解技术，可以将图像矩阵分解为低秩矩阵的乘积，从而去除图像中的冗余信息，实现图像数据的压缩。由于奇异值反映了图像矩阵在不同方向上的能量分布，较大的奇异值对应图像中变化缓慢、较为平滑的部分，即主要特征，如物体的轮廓、大面积的色彩区域等；较小的奇异值对应图像中的细节和噪声，如纹理、微小的斑点等，因此利用 SVD 分解 (1) 将图像矩阵进行分解，并保留前 k 个较大的奇异值，而将其余较小的奇异值设为零，然后利用保留的奇异值和对应的奇异向量重构图像，就可以在保留图像主要视觉特征的同时，大幅减少数据量，实现图像的压缩。

2.2.2 实验测试与结果分析

选取一幅大小为 $m\times n$ 的灰度图像（图 1，lighthouse, m=512,n=768），其对应的图像矩阵为 A。

图 1 lighthouse 原始图像，393216 像素

利用 SVD 分解 (1)，将图像矩阵 A 进行分解，保留前 k 个较大的奇异值，并取不同的 k 值（20 和 50）进行测试，压缩重构图如图 2 所示。

(a) k=50，64050 像素，压缩比 6.14:1

(b) k=20，25620 像素，压缩比 15.35:1

图 2 不同 k 值下的压缩重构图像

从图 2 可以直观地看出，压缩后的图像在一定程度上保留了原始图像的主要特征，如灯塔和房子的轮廓等。但与原始图像相比，也出现了一些模糊和细节丢失的现象，如

房屋的窗户细节变得不那么清晰，图像的边缘也略显模糊。为了更定量地评估压缩效果，可以计算压缩比和峰值信噪比（PSNR）。一般来说，PSNR 值越高，表示图像质量越好，当 PSNR 值在 30dB 以上时，人眼通常难以察觉图像的失真；当 PSNR 值在 20-30dB 之间时，图像会有一定程度的失真，但仍能接受；当 PSNR 值低于 20dB 时，图像失真较为明显。

在本案例中，当 k=50 时获得的重建图像的 PSNR = 28.63dB，当 k=20 时 PSNR = 25.41, 这说明压缩后的图像虽然有一定失真，但仍能保留原图像的主要内容，满足要求不是特别高的应用场景，如网页图像展示、图像预览等。通过调整 k 值，可以进一步优化压缩比和图像质量之间的平衡，以适应不同的应用需求。

2.3 视频前景背景分析案例

2.3.1 背景描述和分析

在视频的前景和背景分离任务中，矩阵的“低秩+稀疏”分解发挥着关键作用。它将视频图像序列构建为矩阵，其中背景具有时间上的稳定性，可表示为低秩矩阵；而前景（如运动物体）及噪声则表现为稀疏矩阵。通过优化模型（3）和优化算法将两者进行分离，能高效提取出动态前景和静态背景。在安防监控中，该方法可实时检测入侵目标，过滤固定场景干扰；在医学影像中，可分离器官背景与病变区域。相比传统方法，低秩 + 稀疏分解无需运动模型先验，适应性更强，且对光照变化、局部遮挡具有鲁棒性。通过调整分解参数，还可平衡分离精度与计算效率，满足不同场景需求。这种数据驱动的分离技术，为计算机视觉中的场景理解、目标跟踪等任务提供了有力支撑，推动了智能监控、自动驾驶等领域的发展。

2.3.2 实验结果与分析

选取一段监控视频（IBMtest2），将每一帧图像按一定规则组成一个列向量，将所有列向量按列组合成一个大的矩阵，此矩阵记为模型（3）中的矩阵 A。利用交替方向乘子法对模型（3）进行求解，可获得解矩阵 L 和矩阵 S，分解代表背景（低秩部分）和运动物体（稀疏部分）。通过原始对偶算法求解模型（3），获得的背景图（矩阵 L）和提取的运动物体（矩阵 S）如图 3 所示。

由矩阵加法分解应用到图像处理的结果可以看出，在较大的噪音水平下，模型（3）仍然非常有效，能够清晰地分离出背景和前景，这表明利用矩阵和分解能有效地识别运动物体，并且能应用于复杂的环境下，如风雪天或者光线不好的场景。

2.4 作业安排

为了进一步加强学生对矩阵及其分解应用的掌握，熟悉程序编写和结果展示，布置与矩阵乘积分解和加法分解相关的作业，包括理论推导和编程实践两个部分。

例如，在矩阵乘积分解的作业中，要求学生能够进行矩阵的 LU 分解、QR 分解和奇异值（SVD）分解，并详细分析这些方法的优缺点和应用场景。在矩阵加法分解的作业中，要求学生能够熟练地使用 MATLAB 或者 Python 实现优化模型（3）的迭代求解，分析算法的性能，将计算结果通过图像的形式展示出来。

最后，从学生作业的完成情况分析教学效果，并进行案例和教学环节的改进提升。

（a）前景（人物）

（b）分离的背景图

图 3 前景（人物）和背景图

3 总结和展望

本案例深入探讨了矩阵乘积分解和加法分解在图像处理领域的应用，结合理论基础、程序实现和数值结果分析，开展了全面的教学实践和作业反馈。

在理论基础部分，详细阐述了矩阵乘积分解和加法分解的基本概念和原理。

在教学案例方面，矩阵乘积分解在图像压缩的应用案例展示了其强大的功能，保留主要特征，去除冗余信息。矩阵加法分解在视频图像处理中的应用案例体现了其在图像信号处理领域的重要应用。

参考文献

[1] 吴金艳.线性代数中的矩阵分解及其应用[J].佳木斯大学学报(自然科学版), 2025, 43(05): 160-162.

[2] 张雨蓉,张书铭,何进荣,等.基于对抗训练的图正则化非负矩阵分解算法[J].延安大学学报(自然科学版),2025,44(01):89-95.

[3] 张长虹,靳全勤.关于线性代数教材中矩阵秩的处理方法[J].大学数学,2020, 36(05): 118-121.

[4] 王炳涛,卢晶梅,高秀芝.数学实验融入线性代数课堂的教学实践与反思[J].科教导刊,2023, (07): 50-53.