Analysis of Question 18 in National College Entrance Examination Mathematics Paper I for 2025

Chunyun Wang

Shacheng Middle School Huailai County Hebei Province, Zhangjiakou, Hebei, 075400, China

Abstract

Question 18 in the 2025 National College Entrance Examination Mathematics Paper I employs ellipses as a geometric framework to comprehensively assess optimization problems involving lines, ellipses, and circles, representing a core question type in analytic geometry. This study first examines the distribution patterns of conic section questions in the past six years' National Paper I exams to identify emerging trends. Through analysis of actual test questions, we conduct a three-dimensional evaluation focusing on content coverage, conceptual approaches, and question design. Subsequently, multiple solution strategies are presented with comparative analysis to reveal underlying mathematical principles. Finally, targeted teaching reflections and recommendations are proposed based on question characteristics, providing valuable insights for analytic geometry instruction in high schools.

Keywords

College Entrance Examination Mathematics; National Paper I; Analytic Geometry; Multiple Solutions to a Single Problem; Teaching Reflection

2025 年高考数学全国Ⅰ卷 18 题浅析

王春云

河北省怀来县沙城中学，中国・河北 张家口 075400

摘　要

2025年高考数学全国1卷第18题以椭圆为载体，综合考查直线、椭圆与圆的最值问题，是解析几何板块的核心题型。本文先梳理近六年全国1卷圆锥曲线试题分布特征，明确该题型的考查趋势；再通过真题重现，从考查内容、思想方法、命题设计三个维度展开题目分析；随后提供多视角解法并对比优劣，挖掘不同解法背后的数学思想；最后结合试题特点提出针对性的教学反思与建议，为高中解析几何教学提供参考。

关键词

高考数学；全国Ⅰ卷；解析几何；一题多解；教学反思

1 引言

解析几何作为高中数学的核心内容，是连接几何与代数的重要桥梁，其核心思想“数形结合”、“化归转化”贯穿高中数学学习全过程。高考对解析几何的考查始终聚焦核心素养，强调对基础知识的掌握、运算能力的提升及数学思想的运用 [1]。2025 年高考数学全国Ⅰ卷第 18 题以椭圆为背景，融合直线、圆的几何性质，设计层次分明的问题链，既符合高考命题“稳中求新”的原则，又充分体现对学生综合能力的考查。本文通过对该试题的系统分析，探究命题规律，挖掘教学启示，为高中解析几何教学提质增效提供思路。

【作者简介】王春云（1989—），女，硕士，中学一级教师，从事高中数学教育研究。

2 近六年全国Ⅰ卷圆锥曲线试题分布特征

梳理 2020-2025 年高考数学全国Ⅰ卷圆锥曲线试题，可清晰把握考查重点与趋势。从题型分布来看，圆锥曲线试题覆盖选择题、填空题、解答题三种题型，其中解答题多位于第 18—22 题的核心位置，分值占比稳定在 15—22 分；从考查内容来看，椭圆、双曲线、抛物线、直线与圆均有涉及，其中椭圆作为核心内容，考查频率较高，且常与直线、圆结合考查综合问题；从考查难度来看，试题呈现“基础铺垫 + 能力提升”的梯度设计，第一问多为求曲线方程等基础题型，后续问题聚焦轨迹、最值、定点定值等综合问题，强调对运算能力与数学思想的考查。

3 2025 年全国 1 卷第 18 题真题重现与题目分析

3.1 真题重现

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$，，下

顶点为 A，右顶点为 B，$|AB|=\sqrt{10}$。

（1）求 C 的方程；

（2）已知动 P 不在 y 轴上，点 R 在射线 AP 上，且满足 $|AP|\cdot|AR|=3$。

设 $P(m,n)$，求 R 的坐标（用 m,n 表示）；

设 O 为坐标原点，Q 是 C 上的动点，直线 OR 的斜率是直线 OP 的斜率的 3 倍，求 $|PQ|$ 的最大值。

3.2 题目分析

考查内容定位：本题聚焦椭圆的核心性质，综合考查向量数量积、直线斜率、圆的方程、最值求解等知识点，覆盖解析几何的核心内容与方法。第 (1) 问以椭圆的离心率、顶点距离为条件求椭圆方程，属于基础题型，考查学生对椭圆基本概念（离心率、顶点坐标）的理解与应用；第 (1)(i) 问结合向量共线与数量积条件求点的坐标，考查向量运算与代数推理能力；第 (2)(ii) 问融合直线斜率关系、圆的轨迹与椭圆上点的距离最值，考查化归转化思想与综合运算能力。

数学思想渗透：试题充分体现数形结合、化归转化、方程与函数等核心数学思想。第 (2)(i) 问中，通过向量共线关系建立坐标联系，将几何条件转化为代数方程，体现数形结合思想；第 (2)(ii) 问通过斜率关系推导出点 P 的轨迹为圆，将椭圆与圆上点的距离最值问题转化为“圆心到点的距离 + 半径”的最值问题，再进一步转化为二次函数的极值问题，完整呈现化归转化与方程函数思想。同时，试题设计强调“多想少算”，如第 (2)(i) 问通过向量共线设参数 λ，可大幅简化运算，考查学生的符号化思想与运算优化意识。

题设计特点：一是层次性鲜明，试题从基础的曲线方程求解，到中等难度的点坐标推导，再到综合的最值求解，梯度清晰，符合高考“分层考查”的命题原则；二是综合性突出，融合解析几何、向量、二次函数等多个板块知识，考查学生知识整合与综合应用能力；三是人文关怀显著，第 (2)(i) 问明确要求用 (m，n) 表示 R 的坐标，为第 (2)(ii) 问的轨迹推导提供明确方向，避免学生因思路偏差陷入复杂运算，体现命题对学生解题思路的引导与关怀。

4 多视角解法探究与对比

本题各问均存在多种解法，不同解法的切入视角不同，运算量与思维难度存在差异。通过多解法探究，可帮助学生拓宽解题思路，优化运算策略，提升思维品质。

4.1 第 (1) 问：椭圆方程求解的多解法

解法 1：由题意的 $a^2+b^2=10$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，解得 $a=3$，$b=1$，求 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$。

解法 2：由题意的 $2a^2-c^2=10$，$\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，解得 $a=3$，$c=2\sqrt{2}$，因此 $b=1$，故 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$。

对比分析：两种解法核心思路一致，均基于椭圆基本性质建立方程，通过离心率减少未知数数量，简化运算过程，体现“优化变量关系”的运算策略。

4.2 第 (2)(i) 问：点 R 坐标求解的多解法

解法 1（距离公式法）：由（1）知 $A(0,-1)$，$P(m,n)$，设 $R(x_0,y_0)$，

因为点 R 在射线 AP 上，P 不在 y 轴上，所以 $\frac{y_0+1}{x_0}=\frac{n+1}{m}$，①

因为 $|AP|\cdot|AR|=3$，所以 $\sqrt{m^2+(n+1)^2}\sqrt{x_0{}^2+(y_0+1)^2}=3$，②

由①②得，$x_0^2=\frac{9m^2}{(m^2+(n+1)^2)^2}$，

因为点 R 在射线 AP 上，所以 $x_0m>0$，

所以 $x_0=\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$，$y_0=\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1$，

因此 R（$\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$，$\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1$）。

解法 2（弦长公式法）：由（1）知 $A(0,-1)$，$P(m,n)$，设 $R(x_0,y_0)$，$k_{\mathrm{AP}}=\frac{n+1}{m}$，$|AP|=\sqrt{1+\left(\frac{n+1}{m}\right)^2}|m|$，

因为点 R 在射线 AP 上，所以 $x_0m>0$，

因为 $|AP|\cdot|AR|=3$，即 $\left(1+\left(\frac{n+1}{m}\right)^2\right)x_0m=3$，

所以 $x_0=\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$，

又因为 P 不在 y 轴上，所以 $\frac{y_0+1}{x_0}=\frac{n+1}{m}$，解得 $y_0=\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1$，

因此 R（$\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$，$\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1$）。

解法 3（三角形相似法）：由（1）知 $A(0,-1)$，$P(m,n)$，设 $R(x_0,y_0)$，分别过点 P、点 R 做 y 轴垂垂足设为 P'、R'。

垂足设为 P'、R'。

因为 $\Delta APP'\sim\Delta ARR'$，所以 $\frac{|AR|}{|AP|}=\frac{|x_0|}{|m|}$，

又因为 $|AP|\cdot|AR|=3$，

所以 $|x_0|=|m|\frac{|AR|}{|AP|}=|m|\frac{\frac{3}{|AP|}}{|AP|}=|m|\frac{3}{|AP|^2}=\frac{3|m|}{m^2+(n+1)^2}$，

因为点 R 在射线 AP 上，所以 $x_0m>0$，

同理可得 $y_0=\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1$，

因此 R（$\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$，$\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1$）。

解法 4（向量共线法）：由（1）知 $A(0,-1)$，$P(m,n)$，设 $R(x_0,y_0)$，$\overrightarrow{AP}=(m,n+1)(m\neq0)$，因此 $|AP|=\sqrt{m^2+(n+1)^2}$。

由 $|AP|\cdot|AR|=3$，得 $|AR|=\frac{3}{\sqrt{m^2+(n+1)^2}}$，

因为点 R 在射线 AP 上，所以 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AR}$ 同向共线，

所以 $\overrightarrow{AR}=\frac{|AR|}{|AP|}\overrightarrow{AP}=$（$\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$，$\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}$），

因此 R（$\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$，$\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1$）。

解法 5（向量共线法）：（i）由（1）知 $A(0,-1)$，故 $\overrightarrow{AP}=(m,n+1)(m\neq0)$，可设 $\overrightarrow{AR}=(\lambda m,\lambda(n+1))(\lambda>0)$，由 $|AP|\cdot|AR|=3$ 得

$\lambda\sqrt{m^2+(n+1)^2}\sqrt{m^2+(n+1)^2}=3$，

故 $\lambda=\frac{3}{m^2+(n+1)^2}$，因此 R（$\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$，$\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1$）。

解法 6（向量法）：由（1）知 $A(0,-1)$，$P(m,n)$，

设 $R(x_0,y_0)$，则$\overrightarrow{AP}=(m,n+1)(m\neq0)$，$\overrightarrow{AR}=(x_0,y_0+1)$。

因为点 R 在射线 AP 上，所以$\overrightarrow{AP}$与$\overrightarrow{AR}$同向共线，

所以$|AP|\cdot|AR|=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AR}=3$，即 $mx_0+(n+1)(y_0+1)=3$，①

又因为 P 不在 y 轴上，所以$\frac{y_0+1}{x_0}=\frac{n+1}{m}$，②

由①②得，$x_0=\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$，$y_0=\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1$，

因此 R（$\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$，$\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1$）。

解法 7（方向向量法一）：由（1）知 $A(0,-1)$，$P(m,n)$，设 $R(x_0,y_0)$，则$\overrightarrow{AP}=(m,n+1)(m\neq0)$，$\overrightarrow{AR}=(x_0,y_0+1)$。

因为点 R 在射线 AP 上，P 不在 y 轴上，可知直线 AP 斜率存在，设为 k，则$\overrightarrow{AP}$的方向向量为$(1,k)$，所以可设$\overrightarrow{AP}=\lambda_1(1,k)$，$\overrightarrow{AR}=\lambda_2(1,k)$。因为点 R 在射线 AP 上，故$\lambda_1\lambda_2>0$。所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AR}=\lambda_1\lambda_2(1+k^2)=3$。所以

$$\begin{cases}m=\lambda_1\\n+1=\lambda_1k\\x_0=\lambda_2\\y_0+1=\lambda_2k\\\lambda_1\lambda_2(1+k^2)=3\end{cases}，解得\begin{cases}\lambda_1=m\\k=\frac{n+1}{m}\\\lambda_2=\frac{3}{\lambda_1(1+k^2)}\end{cases}，$$

所以$x_0=\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$，$y_0=\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1$，

因此 R（$\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$，$\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1$）。

解法 8（方向向量法二）：由（1）知 A(0,−1)，直线 AP 的一个方向向量为$(m,n+1)(m\neq0)$，设 $R(x_0,y_0)$，因为点 R 在射线 AP 上，可设$\overrightarrow{AR}=\lambda\overrightarrow{AP}(\lambda>0)$，即$(x_0，y_0+1)=\lambda(m,n+1)$，

所以$x_0=\lambda m$，$y_0=-1+\lambda(n+1)$。

由$|AP|\cdot|AR|=\lambda|AP|^2=3$ 得$\lambda=\frac{3}{m^2+(n+1)^2}$，

因此 R（$\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$，$\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1$）。

解法 9（参数方程法）：设$R(x_0,y_0)$，直线 AP 的倾斜角为$\alpha\left(0\leq\alpha<\pi,且\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$，则直线 AP 的参数方程为$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\y=-1+t\sin\alpha\end{cases}$，$t$ 为参数。

设 P，R 对应参数分别为 t_1，t_2，则

$$\begin{cases}m=t_1\cos\alpha\\n=-1+t_1\sin\alpha\end{cases}，\begin{cases}x_0=t_2\cos\alpha\\y_0=-1+t_2\sin\alpha\end{cases}。$$

因为$t_1^2=m^2+(n+1)^2$，$|AP|\cdot|AR|=t_1t_2=3$，所以$t_2^2=\frac{9}{m^2+(n+1)^2}$。

解得$x_0=\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$，$y_0=\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1$，

因此 R（$\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$，$\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1$）。

对比分析：距离公式法直接利用斜率与距离关系建立方程，思路直观但运算量较大；向量法通过设参数，将向量关系转化为代数运算，运算量最小，是最优解法；参数方程法借助参数 t 的几何意义求解，体现参数法在解析几何中的应用价值。三种解法的核心差异在于“几何条件转化为代数形式的方式”，凸显“多想少算”的解题原则。

4.3 第 (2)(ii) 问：|PQ| 最大值求解的多解法

解法 1（转化消元法）：由（i）知直线OR 的斜率为

$$\frac{3(n+1)-m^2-(n+1)^2}{3m}=\frac{3n}{m},$$

故$m^2+n^2+8n-2=0$，即$m^2+(n+4)^2=18$。

因此 P 在以 $T(0,-4)$为圆心，$3\sqrt{2}$为半径的圆上。

设 $Q(u,v)$，则$|QT|^2=u^2+(v+4)^2=9(1-v^2)+(v+4)^2=-8(v-\frac{1}{2})^2+27\leq27$，

因此$|PQ|\leq|QT|+|PT|\leq3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$，当 $P(-\frac{3\sqrt{2}}{2},-4-\frac{3\sqrt{6}}{2})$，$Q(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$时等号成立，且直线 OR 的斜率是直线 OP 的斜率的 3 倍。

因此$|PQ|$的最大值为 $3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$。

解法 2（参数方程法）：同参考答案可得 $m^2+(n+4)^2=18$，

故可设 $m=3\sqrt{2}\cos\alpha$，$n=-4+3\sqrt{2}\sin\alpha(\alpha\in[0,2\pi))$，由点 Q 在 C，可设 $Q(3\cos\beta,\sin\beta)(\beta\in[0,2\pi))$。

令$\varphi\in[0,2\pi)$满足

$$\cos\varphi=\frac{3\cos\beta}{\sqrt{(3\cos\beta)^2+(4+\sin\beta)^2}}，\sin\varphi=\frac{4+\sin\beta}{\sqrt{(3\cos\beta)^2+(4+\sin\beta)^2}}，则$$

$$\begin{aligned}|PQ|^2&=(3\cos\beta-3\sqrt{2}\cos\alpha)^2+(\sin\beta+4-3\sqrt{2}\sin\alpha)^2\\&=43-8\sin^2\beta+8\sin\beta-6\sqrt{2}(3\cos\beta\cos\alpha+(\sin\beta+4)\sin\alpha)\\&=43-8\sin^2\beta+8\sin\beta-6\sqrt{2}\cdot\sqrt{(3\cos\beta)^2+(\sin\beta+4)^2}\cos(\alpha-\varphi)\\&\leq43-8\sin^2\beta+8\sin\beta-6\sqrt{2}\cdot\sqrt{(3\cos\beta)^2+(\sin\beta+4)^2}\\&=45-8(\sin\beta-\frac{1}{2})^2+6\sqrt{2}\cdot\sqrt{27-8(\sin\beta-\frac{1}{2})^2}\\&\leq45+6\sqrt{2}\cdot\sqrt{27}\\&=(3\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2.\end{aligned}$$

当且仅当 $\sin\beta=\frac{1}{2}$和$\alpha-\varphi=\pm\pi$两个不等号均取等时，此时$\beta=\frac{\pi}{6}$，$\alpha=\frac{4\pi}{3}$ 或$\beta=\frac{5\pi}{6}$，$\alpha=\frac{5\pi}{3}$，前者对应 $P(-\frac{3\sqrt{2}}{2},-4-\frac{3\sqrt{6}}{2})$，$Q(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$，后者对应$P(\frac{3\sqrt{2}}{2},-4-\frac{3\sqrt{6}}{2})$，$Q(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$，且这两组 P，Q 均满足题目条件。

因此$|PQ|$的最大值为 $3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$。

解法 3（部分参数方程法）：同参考答案可得 $m^2+(n+4)^2=18$，故可设圆心坐标为 $M(0,-4)$，由点 Q 在 C，可设 $Q(3\cos\beta,\sin\beta)(\beta\in[0,2\pi))$

$$\begin{aligned}|PQ|&\leq|MQ|+3\sqrt{2}\\&=\sqrt{(3\cos\beta)^2+(\sin\beta+4)^2}+3\sqrt{2}\\&=\sqrt{27-8(\sin\beta-\frac{1}{2})^2}+3\sqrt{2}\\&\leq3\sqrt{3}+3\sqrt{2}。\end{aligned}$$

当且仅当 $\sin\beta=\frac{1}{2}$时，不等式取等号。因此$|PQ|$的最大值为 $3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$。

解法 4（切线法）：$|PQ|\leq|MQ|+3\sqrt{2}$，下求$|MQ|$最大值。当过Q作椭圆切线l时，当且仅当$MQ\perp l$时，$|MQ|$最大。

设 $Q(x_1,y_1)$，则切线 l 方程为$\frac{x_1x}{9}+y_1y=1$，

此时，$k_l=-\frac{x_1}{9y_1}$，由$k_lk_{QM}=-\frac{x_1}{9y_1}\cdot\frac{y_1+4}{x_1}=-1$，得$y_1=\frac{1}{2}$，

代入椭圆方程得$x_1=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$，此时

$$|MQ|_{max}=\sqrt{(x_1-0)^2+(y_1+4)^2}\left(或=\sqrt{1+\left(\frac{y_1+4}{x_1}\right)^2}|x_1-0|\right)=3\sqrt{3},$$

因此$|PQ|$的最大值为$3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$。

对比分析：三种解法均基于“化归转化”思想，将$|PQ|$的最值转化为“圆外点到圆上点的距离最值”；解法 1（转化消元法）思路简洁，运算量最小；解法 2（参数方程法）和解法 3（部分参数方程法）借助三角函数参数化坐标，体现参数法的通用性；解法 4（切线法）利用几何性质（切线与半径垂直）求解最值，凸显数形结合思想的优势。

5 教学反思与建议

结合 2025 年高考数学全国 1 卷第 18 题的考查特点与学生解题常见问题，从以下四个维度提出教学建议：

一是强化基础，构建知识体系。解析几何以代数方法解决几何问题，要狠抓曲线定义、性质、斜率、向量等基础知识，借助思维导图梳理“定义—性质—方程—应用”逻辑。深挖教材例题习题价值，用基础训练夯实功底，增强学生解题信心。

二是优化运算，培养多想少算习惯。针对学生盲目运算、计算量大易出错问题，引导先几何分析、再代数表达，合理利用图形性质简化运算。加强算理算法教学，通过设参、向量、几何性质等优化过程，开展一题多解，提升运算效率与准确性，培养学生的运算优化意识[2]。

三是渗透思想，提升综合思维。常态化融入数形结合、化归转化、函数与方程思想，强化几何与代数双向转化训练，将复杂陌生问题简单化、熟悉化。采用问题链教学，深挖问题本质，培养逻辑推理与综合分析能力[3]。

四是聚焦素养，落实育人目标。立足数学抽象、逻辑推理、数学运算、直观想象等核心素养，依托试题分层设计，关注学生探究过程，培养探究精神与创新意识，真正落实立德树人根本任务[4]。

6 结语

2025 年高考数学全国 1 卷第 18 题以椭圆为载体，综合考查解析几何的核心知识与方法，命题设计层次分明、内涵丰富，既体现高考的选拔功能，又对高中解析几何教学具有良好的导向作用。教学中应立足基础、优化运算、渗透思想、聚焦素养，引导学生构建系统的知识体系，提升综合解题能力，实现从“解题”到“解决问题”的转变。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）[S]. 北京：人民教育出版社，2020.

[2] 李红庆. 解析几何中“多想少算”的解题策略探究[J]. 数学通报，2024(3)：45-48.

[3] 张奠宙，宋乃庆. 数学教育概论（第4版）[M]. 北京：高等教育出版社，2021.

[4] 王尚志，史宁中. 核心素养导向的高中数学教学改革[J]. 数学教育学报，2022(1)：36-40.